This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

[redacted]

OFO
KLEIN

Ausgewählte Kapitel

der

Zahlentheorie I.

Vorlesung,

gehalten im Wintersemester 1895/96

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von A. Sommerfeld.

GÖTTINGEN 1896.

1898.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Einleitung.

Die Punktgitter in der Ebene 1
Arithmetische Darlegung des Euklidischen Algorithmus bezw. der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung 9
Zugehörige geometrische Interpretation 17
Entwickelung rationaler Brüche, Erzeugung aller unimodularen Substitutionen durch S und T, bezw. S und S' 25
Der Satz von Lagrange über die relativen Minima der Linearformen . . 39

I. Haupttheil: Die Reductionstheorie der einzelnen binären quadratischen Form.

I. Geometrische Vorbegriffe.

Das System der Geometrie 50
Die Pseudometrik, der elliptische Fall 57
Der hyperbolische und der parabolische Fall 71
Bedeutung des Problems der zahlentheoretischen Aequivalenz zweier binärer quadratischer Formen 82

II. Die Reductionstheorie im parabolischen Falle 93

III. Die Reductionstheorie im hyperbolischen Falle.

Die Einführung der natürlichen Umrisspolygone, Definition der reduzirten Formen 103
Serien zusammengehöriger reduzirter Formen 113
Arithmetische Bestimmungen hierfür 120
Die ganzzahligen Formen insbesondere ihre regulären Automorphieen . . 128
Beziehungen zur Pell'schen Gleichung, der Pell'sche Winkel 141
Ganzzahlige Formen derselben Discriminante, Endlichkeit der Klassenzahl 149
Zahlenbeispiel D = 40 152

IV. Die Reductionstheorie im elliptischen Falle 165

Der fundamentale Kegelschnitt und seine Parameterda

Die definiten quadratischen Formen und d Inneren des Kegelschnitts.

Abgrenzung des reducirten Raumes . . . . . .
Rationale Punkte auf dem Kegelschnitt und das Hülfsmit Construction . . . . . .
Fortschreitende Construction neuer Dreiecke von dem
Algorithmus für die Parameterwerthe der successiven
Beziehungen zur Kettenbruchentwickelung der rationale der Elementarsehnen erster und zweiter Art
Der Fundamentalbereich (Discontinuitätsbereich) der Gru
Verschärfungen für den Rand des Fundamentalbereichs: gewöhnlichen Automorphieen . . . . . .
Der Fundamentalbereich der erweiterten Gruppe ($\alpha\beta$ formae ancipites . . . . . .
Vergleich der neuen Theorie mit den früheren Paralle

. Die Formen mit $D = 0$ und die Punkte a schnitt.

Aequivalente Punkte auf dem Kegelschnitt liegen übe

. Die indefiniten Formen mit $D > 0$ und die

Seite

Die Automorphieen unserer Formen 267
Die Bedeutung der gewöhnlichen Automorphieen bei Zugrundelegung der Cayley'schen Massbestimmung 271
Entsprechende Characterisirung der anderen Automorphieen 283
Die specifische Schwierigkeit der Theorie 290

Anhang: Vorläufiges über elliptische Functionen und deren Zusammenhang mit der Theorie der definiten quadratischen Formen.

Die Parallelgitter als gemeinsame Grundlage der beiden Theorieen . . . 295
Eine erste Definition der elliptischen Functionen (Voranstellung der p (u), $p'(u)$, g_2, g_3,) 302
Verhalten der so definirten Functionen in dem Periodenparallelogramm der u-Ebene 309
Eintheilung der ω-Ebene in Kreisbogendreiecke 313
Das Verhalten der Modulfunctionen im einzelnen Fundamentalbereich der ω-Ebene 331
Die reelle ω-Axe als Ort gehäufter Singularitäten 337
Aufsteigen zu den Modulformen 340
Die elliptischen Modulfunctionen als analytische Invarianten unserer zahlentheoretischen Gebilde 352

Weiterführung der elliptischen Theorie: Das allgemeine Programm der „Modulfunctionen“ 356
Nähere Angaben über die niedersten Stufenzahlen 365
Noch weitergehende Verallgemeinerungen . . . . . 384—391

Absicht dieser Vorlesung ist es, die Theorie der binären quadratischen Formen in geometrischem Gewande zu entwickeln. Dabei wünschen wir nicht, für unsere geometrische Auffassung der Theorie den prinzipiellen Vorrang gegenüber einer rein arithmetischen Behandlung in Anspruch zu nehmen. Unsere Meinung ist es vielmehr, daß anschauliches Erfassen und logische Behandlungsweise der Mathematik sich nicht ausschliessen, sondern gegenseitig unterstützen sollen. In diesem Sinne werden wir in dem parallel laufenden Seminar dieselbe Theorie unter wesentlicher Mitwirkung von Hilbert mehr von ihrer

anderlichen x. und y (ebenso wie
ten a, b, c) ganze Zahlen. Wir vere
geometrischer Auffassung dazu
der x, y - Ebene die ganzzahligen
markiren. Wir legen irgend ein
Parallelcoordinaten zu Grund
braucht nicht gerade rechtwin
auch kann der Maassstab, mit
der x - und y - Axe messen ver
Durch die Punkte x = 1, 2, 3 .. der
die Punkte y - 1, 2, 3 .. der y - C
wir Parallelen zu den Coordin
und erhalten die Figur eines
gitters. Die Eckpunkte desselben
terpunkte", liefern uns die ganz

Eine erste Frage, die wir zu erledigen haben, ist diese: <u>Auf wie viel Arten ist es möglich, ein Punktgitter als Parallelgitter aufzufassen?</u>

Wir denken uns die beiden durch den Nullpunkt verlaufenden Geraden eines ev. neuen Parallelgitters als Axen eines neuen x', y' - Systems und wählen als Massseinheit auf den neuen Axen die Entfernung des auf der betr. Axe gelegenen nächsten Punktes vom Nullpuncte. Sollen beide Parallelgitter, das neue und das alte, zu demselben Punktgitter gehören, so müssen den sämtlichen ganzzahligen Punkten des x, y - Systemes ganzzahlige Punkte im x', y' - System entsprechen und umgekehrt. Wir können daher unsere ursprüngliche Aufgabe analytisch folgendermassen aussprechen:

<u>Es sollen alle möglichen Transformationsformeln</u>: $x = \alpha x' + \beta y'$

$y = \gamma x' + \delta y'$

$\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ eine Ausnahmestel
schliessen denselben hier aus
unterscheiden wir die Transf
gleichstimmig oder ungleichs
nachdem $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ oder $<$
Im ersteren Falle ist der Sinn d
durch welche die positive x-
sitive y-Axe, bez. die positive
die positive y'-Axe auf den
Wege übergeführt wird, derse
ten Falle der entgegengesetz
Aus der Bedingung, dass d
ligen Punkten x', y' ganzzahli
entsprechen sollen, folgt zunä
$x' = 1, y' = 0$ bez. $x' = 0, y' = 1$

aus der Bedingung, dass auch den ganzzahligen Werten x, y ganzzahlige Werte x', y' entsprechen sollen, folgt in derselben Weise, dass auch die folgenden Grössen

$$\frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad \frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad \ldots,$$

bez. ganzen Zahlen (a, b, c, d) gleich sein müssen.

Wir haben also die Gl.:

$$\alpha = a(\alpha\delta - \beta\gamma),$$
$$\beta = b(\alpha\delta - \beta\gamma),$$
$$\gamma = c(\alpha\delta - \beta\gamma),$$
$$\delta = d(\alpha\delta - \beta\gamma),$$

aus denen sich durch geeignete Multiplication ergibt:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma) - (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

oder

$$1 = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Da die rechts stehenden Factoren ganze Zahlen sind, müssen sie beide entweder gleich $+1$ oder gleich -1 sein. Wir gewinnen also das Resultat: <u>Die Determinante unserer Transformation $\alpha\delta - \beta\gamma$ muss gleich ± 1 sein.</u> Umgekehrt sieht man, dass dann wirklich unsere Transformation die verlangten Eigen-

Nullpunktes mit den Punkten
und $x' = 0$, $y' = 1$ zu einem
gramm vervollständigen. D
haben im x, y - Systeme die E
$x = \alpha$, $y = \gamma$ bez. $x = \beta$, $y = \delta$. De
transformirten Fundamentalp
gramms ist also gerade gle
terminante $\alpha\delta - \beta\gamma$ voraus
wir den Inhalt des ursprüng
mentarparallelogramms = 1
Hiermit sagt die Gleichung
aus, dass der Flächeninhalt
Elementarparallelogramms
d. h. ebenso gross, wie der des
In dieser geometrischen Fo

nun Umriss skizziren. Die Anzahl der Elementarparallelogramme ist ebenso gross, wie die Anzahl der Gitterpuncte; denn wir können jedem Gitterpuncte ein anstossendes Parallelogramm zuordnen und umgekehrt. Die Anzahl der Gitterpuncte, also auch die der Elementarparallelogramme ist hiernach in beiden Gittern dieselbe. Wir teilen nun durch die beiden Gitter dieselbe Grösse (nämlich den Inhalt der ganzen Ebene) in dieselbe Anzahl unter sich gleicher Theile (einzelner Parallelogramme) ein. Hiermit werden diese Teile bei beiden Einteilungen gleich gross ausfallen. – Diese Überlegung kann und muss natürlich präcisirt werden, wie solches im Seminar geschehen wird.

Die Frage nach den möglichen Parallelgittern führte uns auf die Untersuchung der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. Ohne Weiteres zeigt sich dass α und γ, ebenso β und δ etc. relativ prim gewählt werden müssen. Ersteres heisst geometrisch, dass die erste Seite des

len) finden kann, welche
chung genügen, oder ande
dass man zu einer beliebig
gezogenen ersten Strecke, n
ihrem Innern keinen Gitter
eine zweite so bestimmen k
das entstehende Parallelog
Flächeninhalt 1 hat.

Zunächst zeigt sich, dass n
ches Zahlenpaar (β', β'') gefun
gleich unendlich viele (un
alle überhaupt existirenden
werden können. Sei näml

$$\alpha\beta'' - \beta'\gamma = 1.$$

Wir subtrahiren davon die

setzt werden, so muss, unter m eine ganze Zahl verstanden, jede Lösung unserer Gl. die Form haben:

$$\beta - \beta' = m\alpha, \quad \sigma - \sigma' = m\gamma$$

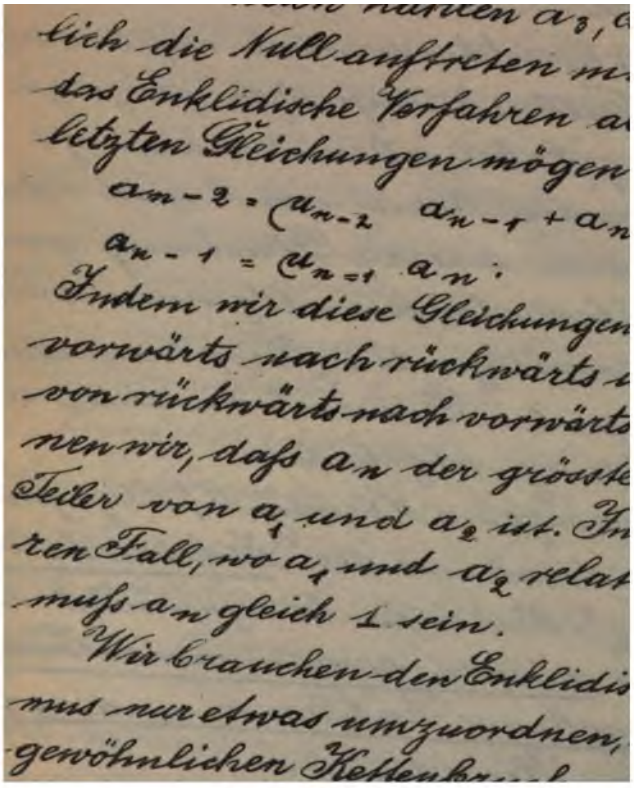
oder

$$\beta = \beta' + m\alpha, \quad \sigma = \sigma' + m\gamma.$$

Dieser Schluss beruht wesentlich auf den elementaren Teilbarkeitsgesetzen der ganzen Zahlen. Umgekehrt erkennt man, dass die vorstehenden Werte von β und σ bei beliebigem m unserer Gleichung genügen. Wir haben also die allgemeinste Lösung der vorliegenden „Diophantischen Gleichung ersten Grades" aus einer speziellen Lösung abgeleitet.

Um eine einzelne Lösung β', σ' zu finden, dazu dient uns der „Euklidische Algorithmus". Derselbe hat zunächst den Zweck, den grössten gemeinsamen Teiler zweier gegebener Zahlen a_1 und a_2 zu berechnen. Wir setzen an:

$$a_1 = q_1 a_2 + a_3$$
$$a_2 = q_2 a_3 + a_4$$
$$a_3 = q_3 a_4 + a_5$$
$$\cdots\cdots\cdots$$



lich die Null auftreten m
das Enklidische Verfahren a
letzten Gleichungen mögen

$$a_{n-2} = (a_{n-2}\ a_{n-1} + a_n$$

$$a_{n-1} = (a_{n-1}\ a_n :$$

Indem wir diese Gleichungen
vorwärts nach rückwärts
von rückwärts nach vorwärts
nen wir, dass a_n der grösste
Teiler von a_1 und a_2 ist. In
ren Fall, wo a_1 und a_2 relat
muss a_n gleich 1 sein.

Wir brauchen den Enklidis
mus nur etwas umzuordnen,
gewöhnlichen Kettenbr...l

Um anzudeuten, daß die Kettenbruchentwicklung auch auf irrationale Zahlen ausgedehnt werden kann, schreiben wir ω an Stelle von a_1/a_2 und setzen die folgenden Gleichungen an:

$$\omega = a_1 + r_1$$
$$\frac{1}{r_1} = \omega_1 = a_2 + r_2$$
$$\frac{1}{r_2} = \omega_2 = a_3 + r_3$$

$$\omega = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}$$

Hier bedeuten die a_1, a_2 wieder ganze Zahlen, die $r_1, r_2 \dots$ positive echte Brüche; die ersteren bezeichnet man als Teilnenner, die letzteren wollen wir Teilreste nennen. Brechen wir den Kettenbruch an einer beliebigen Stelle ab, so erhalten wir einen „Näherungswert" für die Zahl ω. Die Näherungswerte sind rationale Brüche von der Form $\frac{p}{q}$. Wir haben

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1}{1}$$
$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{a_1\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) + 1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} \quad \text{etc.}$$

Von den Näherungsbrüchen gehen wir zu Näherungspaaren über, in denen wir

wir noch nach rückwärts in
se fort, indem wir definir

$p_0 = 1\,, \quad q_0 = 0$

$p_{-1} = 0\,, \quad q_{-1} = 1\,.$

d. 31. X. Zwischen den aufe
genden Näherungsbrüchen
die folgende einfache Recu
mel:

$$1)\quad \frac{p_r}{q_r} = \frac{a_r p_{r-1} + p_{r-2}}{a_r q_{r-1} + q_{r-2}}$$

Wir beweisen dieselbe dur
dige Induction, nehmen a
dieselbe Formel für den
rungsbruch richtig sei, d

$p_{r-1} = a_{r-1} p_{r-2} + \dots$

ihn mit der Zahl a_r abbrechen. Der $r$te Näherungsbruch, können wir auch sagen, entsteht aus dem $(r-1)^{\text{ten}}$, wenn wir a_{r-1} durch $a_{r-1} + \frac{1}{a_r}$ ersetzen. Thun wir dieses in der Formel für $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$, so ergiebt sich, da $p_{r-2}, q_{r-2}, p_{r-3}, q_{r-3}$ die Zahl a_{r-1} nicht mehr enthalten:

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{(a_{r-1} + \frac{1}{a_r})\, p_{r-2} + p_{r-3}}{(a_{r-1} + \frac{1}{a_r})\, q_{r-2} + q_{r-3}} = \frac{a_r p_{r-1} + p_{r-2}}{a_r q_{r-1} + q_{r-2}}.$$

Berücksichtigt man noch, daß die Formel 1) für $r = 1$ richtig ist, so ist sie damit für jedes r bewiesen.

Wir zeigen ferner, daß die Recursionsformel nicht nur für die Näherungsbrüche, sondern auch für die Näherungspaare besteht, daß also:

$$2) \quad \begin{aligned} p_r &= a_r p_{r-1} + p_{r-2} \\ q_r &= a_r q_{r-1} + q_{r-2}. \end{aligned}$$

Letzteres wird dann zutreffen, wenn die rechten Seiten von 2) relativ prim sind. Wir bezeichnen dieselben vorläufig mit p'_r, q'_r und haben dann:

$$(p'_r q_{r-1} - q'_r p_{r-1}) = -(p_{r-1} q_{r-2} - q_{r-1} p_{r-2})$$

Durch die wiederholte Ausführung der

mel 2) ist bewiesen.

Die gleichzeitig bewiesene Re

3) $p_r q_{r-1} - q_r p_{r-1} = (-1)^r$

wird als Determinantensatz

brüche bezeichnet.

Nach 2) ergiebt sich p_r au

u_r - malige Hinzufügung v

Bei diesem Verfahren liegt e

schen das $r-2^{te}$ und das r

paar noch die folgenden Za

einzuschalten:

2') $s\,p_{r-1} + p_{r-2}$

$s\,q_{r-1} + q_{r-2}$ $(s = 1, 2, \ldots ($

welche man offenbar auch

kann:

auch als Hauptnäherungspaare.

Endlich drücken wir noch die zu entwickelnde Größe w selbst recurrent mit Benutzung der Teilreste r_r aus. Es war ja

$$w = u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{u_r + r_r}}}$$

w entsteht also aus $\frac{p_r}{q_r}$, wenn wir hier $u_r + r_r$ statt u_r eintragen; mithin haben wir

$$4) \quad w = \frac{p_r + r_r p_{r-1}}{q_r + r_r q_{r-1}} .$$

Wir benutzen diese Formel, um uns ein Urtheil über die Abweichung des r^{ten} Näherungsbruches von w_r zu verschaffen. Wir haben:

$$5) \quad w - \frac{p_r}{q_r} = \frac{r_r (-1)^{r-1}}{q_r (q_r + r_r q_{r-1})} .$$

Die Abweichung wird immer kleiner, je weiter wir in der Reihe der Näherungsbrüche vorwärts gehen; denn der Nenner wächst mit wachsendem r, während der Zähler ein echter Bruch ist. Vor Allem aber sehen wir: Die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche sind abwechselnd grös-

lich auf die Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

zurück; hier waren α und
relativ prime Zahlen, β u
funden werden. Zu dem
keln wir $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einen Kette
selbe bricht an einer gen
r ten) ab, so daß

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{p_n}{q_n}$$

Da Zähler und Nenner a
dieser Gleichung relativ p
ben wir auch

$$\alpha = p_n, \quad \gamma = q_n.$$

Nehmen wir noch das vor

Gleichung, indem wir setzen

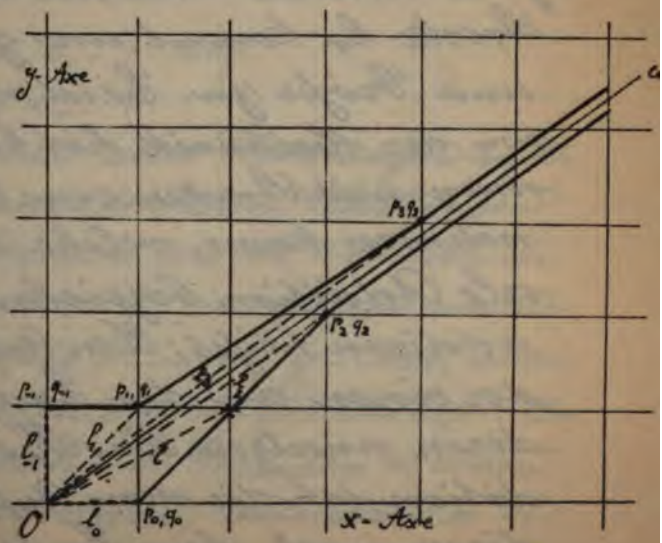
$$\beta = (-1)^n p_{n-1} \,, \quad \delta = (-1)^n q_{n-1}$$

Die Kettenbruchentwickelung liefert uns also in ihrem vorletzten Näherungspaar (ev. bis auf das Vorzeichen) die gesuchte Lösung der Diophantischen Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Der Tendenz dieser Vorlesung entsprechend fragen wir uns: was bedeuten alle diese Dinge geometrisch? Wir gewinnen dadurch ein lebhafteres Bild, als es die abstracten Formeln geben können.

Wir ziehen in unserem Gitter die Gerade $w = \frac{x}{y}$ u. markieren die Näherungspunkte von w, d.h. die Gitterpunkte mit den Coordinaten p_r, q_r. Von den Hauptnäherungspunkten liegen nach



eingeschaltet sind, auf
die anderen auf der l
Wir verbinden jeden der
te mit dem Nullpunkte O
dungsstrecke des r ten
tes heisse l_r. Speciell sin
zwei auf der x resp. y-
gene Strecken von der La
Strecke l_r kommt eine ge
und Größe zu. Es ist nu
von der Mechanik her be
man mit Strecken eine Op
nehmen kann, welche m
als Addition bezeichne
addiren heißt: Den Anfa

gezogene Verbindungsstrecke. Der moderne Name für Streckenrechnung ist Vectoranalysis.

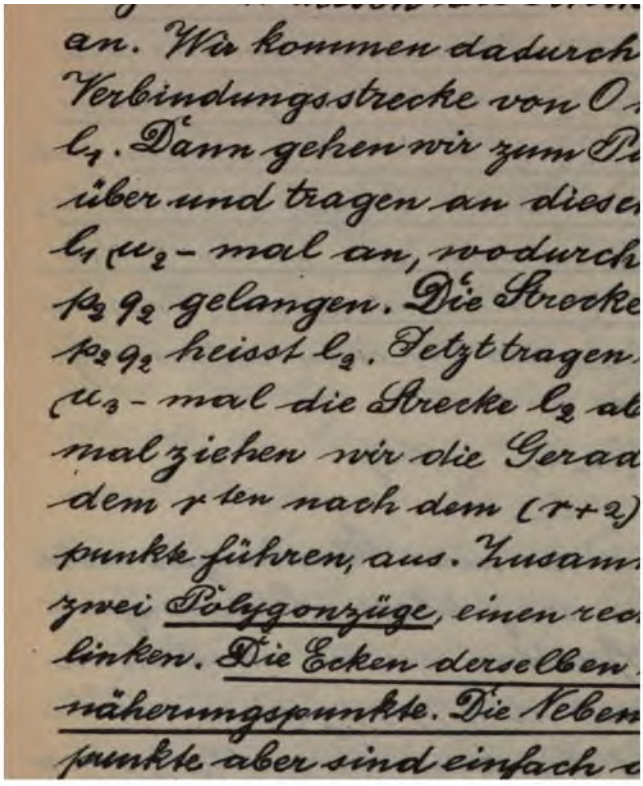
Frei. d. 1. XI. Auf diese Streckenrechnung weisen uns unsere Recursionsformeln hin. Wir behaupten: es entsteht der Vector l_r des r^{ten} Hauptnäherungspunktes aus dem Vector l_{r-2}, wenn wir zu diesem den Vector l_{r-1} μ_r - mal addiren; und: es entsteht der Vector l eines Nebennäherungspunktes, wenn wir zu l_{r-2} den Vector l_{r-1} ϱ - mal addiren. Oder, in den Symbolen der Streckenrechnung ausgedrückt:

$$l_r = l_{r-2} + \mu_r l_{r-1} \quad \text{bez.}$$

$$l = l_{r-2} + \varrho\, l_{r-1}.$$

In der That sind diese Gleichungen nichts anderes als unsere früheren Gleichungen 2) und 2'). Spalten wir sie nämlich in „Componenten" d. h. projiciren wir die Strecken auf die x- und y-Axe, so ergeben sich gerade jene Recursionsformeln.

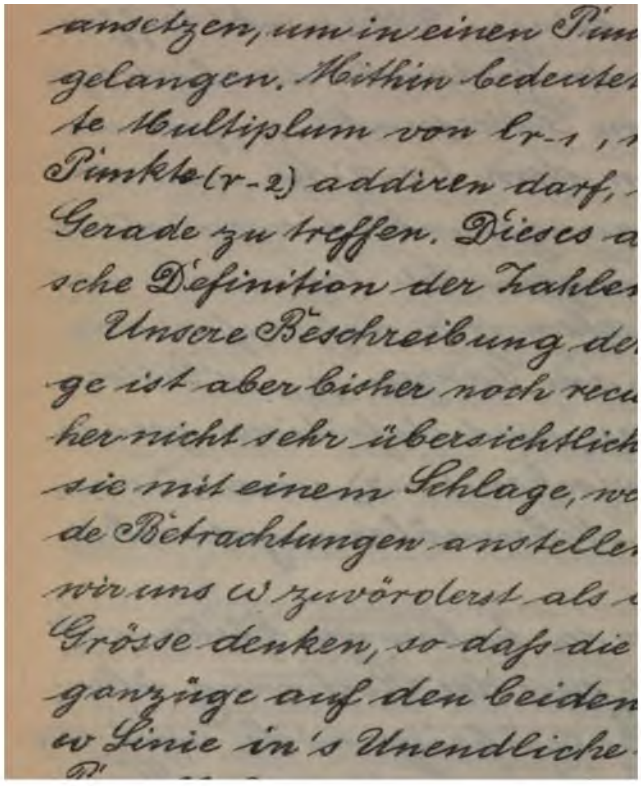
Wir wollen auch der Geraden w einen Vector (L) zuordnen, welcher der Gl. (4) entsprechend gegeben ist durch



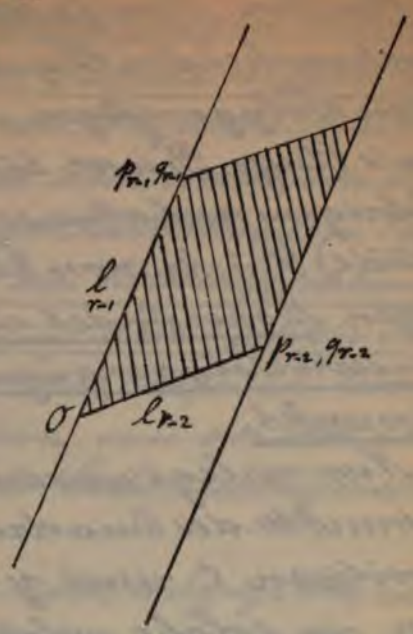
an. Wir kommen dadurch
Verbindungsstrecke von O
l_1. Dann gehen wir zum P
über und tragen an dies
l_1 (u_2 - mal an, wodurch
$p_2 q_2$ gelangen. Die Strecke
$p_2 q_2$ heisst l_2. Jetzt tragen
(u_3 - mal die Strecke l_2 a
mal ziehen wir die Gera
dem r ten nach dem $(r+2)$
punkte führen, aus. Zusam
zwei Polygonzüge, einen re
linken. Die Ecken derselben
näherungspunkte. Die Neben
punkte aber sind einfach

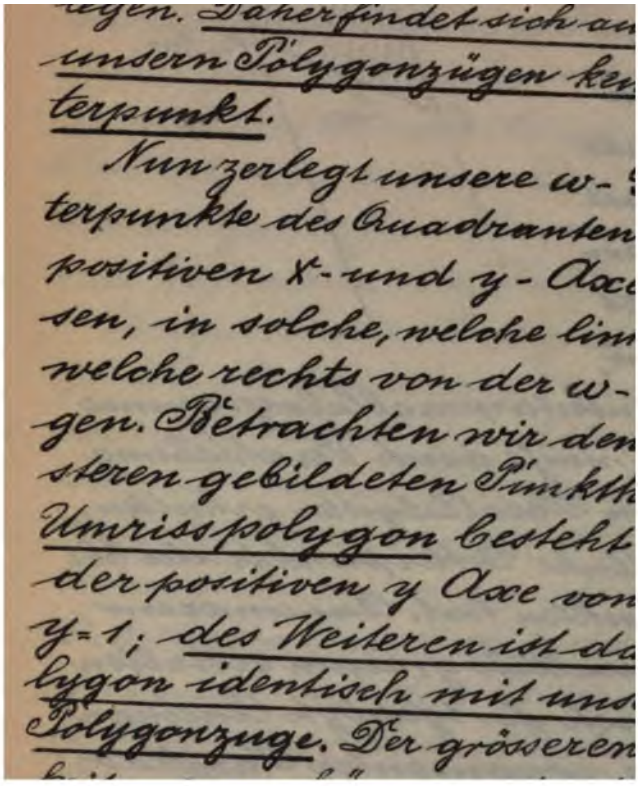
Strecke l_{r-1} parallel. Die Strecke l_{r-1} selbst enthält in ihrem Innern keinen Gitterpunkt; es bedeutet dieses nichts Anderes, als wenn wir oben sagten: Die Zahlen p_{r-1}, q_{r-1} sind relativ prim. Desgleichen können wir bei einmaligem Abtragen von l_{r-1} an p_{r-1}, q_{r-2} keinen Gitterpunkt treffen. Wohl aber ist der Endpunkt der abgetragenen Strecke ein Gitterpunkt u. zw. der erste zwischen dem $(r-2)$ten und $r$ten Hauptnäherungspunkt eingeschaltete Nebennäherungspunkt. Indem wir so fortfahren sehen wir, daß auf unserer Polygonseite im Ganzen u_{r-1} Gitterpunkte liegen, und daß dieses gerade die $u_r - 1$ zwischen $(r-2)$ und (r) eingeschalteten Nebennäherungspunkte sind.

Die Zahlen u_r haben wir bisher stillschweigend aus der Rechnung übernommen. Es erübrigt noch, auch diese geometrisch zu bestimmen. Das gelingt, wenn wir die w - Linie, welche sich zwischen unsern Polygonzügen hindurchzieht, berücksichtigen.



nämlich 1 / nach dem Determinantensatze der Kettenbrüche (s. Gl. 31) und seine Ecken sind Gitterpunkte. Dasselbe kann in seinem Innern keinen Gitterpunkt enthalten, sonst könnten wir nämlich nicht, wie es nach der Definition der Elementarparallelogramme möglich sein muß, durch Verschiebung desselben ein Parallelgitter erhalten, welches sämtliche Gitterpunkte der Ebene zu Eckpunkten hat. Aus unserem Elementarparallelogramm erhalten wir nun durch fortgesetzte Aneinanderreihung congruenter Parallelogramme (vergl. die Figur) einen „Elementarstreifen". Dieser kann ebenso wenig wie das einzelne Parallelogramm einen Gitterpunkt im Innern





herumschlingen. Straff gezogen nimmt derselbe genau die Gestalt unseres linken Polygonzuges an. In derselben Weise verfahren wir mit dem rechts von der w- Geraden gelegenen Punkthaufen. Sein Umrisspolygon bez. ein herumgeschlungener Faden liefert uns den rechten Polygonzug. Dies ist die einfache hier zu gebende Definition, von der wir in der Folge vielfach Gebrauch machen werden.

Do. d. 8. XI. Wir haben noch anzugeben, welche Besonderheiten eintreten, wenn wir w gleich einer rationalen Grösse $\frac{\lambda}{\nu}$ annehmen. Die w- Linie zerlegt die Gitterpunkte zwar wiederum in zwei Klassen, in links bez. rechts gelegene Punkte. Dabei bleiben aber noch die Gitterpunkte auf der w- Linie selbst übrig, welche wir nach Belieben der einen oder anderen Klasse zurechnen können. Thun wir das erstere (fig. 1), so müssen wir zu unserm linken Umrisspolygon das Stück der w- Geraden von dem letzten Näherungs

tion gleichfalls
in eine unend-
lich lange Strek-
ke aus, welche
von p_{n-1}, q_{n-1} pa-
rallel zur w Ge-
raden in's Un-
endliche reicht.
Rechnen wir aber
den rationalen
Punkt α, γ und
die Vielfachen
desselben $(m\alpha, m\gamma)$
zu den rechts von
w gelegenen Punk-

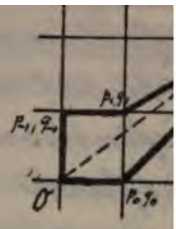


Fig 1.

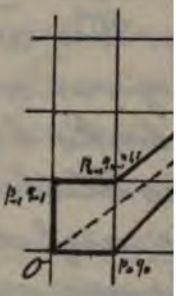


Fig. 2.

gon die Seite p_{r-2}, q_{r-2} bis ∞ bekommt, welche der w-Geraden parallel ist. Beidemal liegt zwischen den Polygonzügen ein Elementarstreifen, im ersten Fall rechts, im zweiten links von der o-Linie.

Die geometrische Construction des Kettenbruches führt uns so noch etwas weiter, als die ursprüngliche Berechnung, in dem sie uns in den unendlich fernen Ecken der Polygone noch zwei neue Näherungspunkte liefert. Wir haben somit, wie oben an den Anfang des Kettenbruches die Näherungspunkte p_0, q_0 und p_{-1}, q_{-1}, jetzt auch an das Ende desselben zwei ergänzende Näherungspunkte, p_{n+1}, q_{n+1} und p_{n+2}, q_{n+2} hinzugefügt, welche beide im Unendlichen liegen. Wir können auch arithmetisch zu ihnen gelangen, wenn wir uns das Abbrechen des Kettenbruches dadurch hervorgebracht denken, daß auf den Teilnenner $\mathfrak{u}_n$ eine Zahl $\mathfrak{u}_{n+1} = \infty$ folgt. Halten wir dann die Gültigkeit der Recursionsformeln auch für $r > n$

q_{n+2}, was mit unserer C
übereinstimmt.

Auch die Möglichkeit de
denen Constructionen in e
lässt sich leicht arithm
fen. Haben wir nämlic
bruch mit $(u_n > 1$, so k
statt $\frac{\alpha}{\gamma} = (u_1 + \frac{1}{(u_2 + \cdots \frac{1}{(u_n}$ schreib

haben wir aber $(u_n = 1$, so k
für $\frac{\alpha}{\gamma} = u_1 + \frac{1}{u_2 + \cdots \frac{1}{u_{n-1} + \frac{1}{1}}}$ setzen

Wir haben es also allem

Anzahl, bewirken also, dass n ungerade ist, so gehört p_n, q_n (wie alle Näherungspunkte mit ungeradem Index) zum linken Polygonzuge und wir kommen auf die Figur 2. Geben wir ihm eine gerade Anzahl, so wird p_n, q_n ein Punkt des rechten Polygonzuges, und wir erhalten die Figur 2.

Wir bemerken noch, dass die Annahme α und $\gamma > 0$ keine wesentliche ist. Im entgegengesetzten Falle können wir nämlich dieselben Constructionen in einem der anderen Quadranten ausführen.

Hiernach kommen wir noch einmal auf die Diophantische Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ zurück. Wir werden die Gesammtheit der Lösungen in zwei Kategorien teilen. Wir können nämlich entweder annehmen, dass

a) $\alpha > \beta$ oder dass b) $\alpha < \beta$,

dann wird auch, von den allerniedersten Fällen, die uns nicht interessiren, abgesehen, gleichzeitig sein:

a) $\gamma > \delta$ bez. b) $\gamma < \delta$.

Um alle Fälle a) aufzuzählen, nehmen

+1 und gleichzeitig (wegen
Um alle Fälle 6.) zu gewin
wir β u. δ relativ prim u
beliebig an, entwickeln
Kettenbruch von einer un
derzahl; den vorletzten
nennen wir $\frac{\alpha}{\gamma}$. Dann hat
$= (-1)^n$ oder $\alpha\delta - \beta\gamma = (-1)^n$
zeitig $\alpha < \beta$.

Endlich kommen wir zu
gangsfrage zurück: Wie ka
ein gegebenes Punktgitt
gitter einzeichnen? Als R
schen den Coordinaten
punktes im neuen Gi

wobei $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sein musste und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze und paarweise relativ prime Zahlen wären. Wir denken sie uns diesen Bedingungen entsprechend irgendwie gegeben. Setzen wir $\frac{x''}{y} = w, \frac{x'}{y'} = w'$, so lautet die Beziehung zwischen w und w' folgendermassen:

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$$

Diese Beziehung können wir nun auf Grund unserer neuesten Entwickelungen auch in die Gestalt eines Kettenbruches umsetzen. Zum Beweise unterscheiden wir die obigen Fälle a) und b).

Im Falle a) ($\alpha > \beta$) entwickeln wir $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einen Kettenbruch:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = (u_1 + \frac{1}{(u_2 + \cdots \frac{1}{(u_n}$$

von einer geraden Gliederzahl. Wir setzen dann, in Übereinstimmung mit den genannten Bedingungen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, wie oben:

$$\alpha = p_n, \gamma = q_n, \beta = p_{n-1}, \delta = q_{n-1}.$$

Daneben betrachten wir den folgenden Kettenbruch:

Näherungsbrüche identis
des vorhergehenden, de
rungsbruch (d. h. der
zen Kettenbruches) en
n ten Näherungsbruche
gehenden durch Ver
u_n mit $(u_n + \frac{1}{w_1})$. Dah
unseres Kettenbruches

$$\frac{(u_n + \frac{1}{w_1}) p_{n-1} + p_{n-2}}{(u_n + \frac{1}{w_1}) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{1}{q}$$

$$\frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$$

Unser Kettenbruch a) ha
Im Falle b) $(\alpha < \beta)$ entw

setzt werden darf. Daneben stellen wir den folgenden Kettenbruch:

$$(a_1 + \frac{1}{(a_2 + \ldots \frac{1}{(a_n + w')}}$$

Sein Wert ist

$$\frac{(a_n + w')p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + w')q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n + w' p_{n-1}}{q_n + w' q_{n-1}} = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$$

Unser Kettenbruch b) hat also wieder den Wert w. Wir haben also das zusammenfassende Resultat: Ist w mit einer Grösse w' verbunden durch die Gl:

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta},$$

wo zwischen den ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Relation besteht $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, so kann man die Abhängigkeit der Grösse w von w', je nachdem der Fall a) oder b) vorliegt, durch den Kettenbruch a) oder b) darstellen.

Die Rechenoperationen, durch welche wir nach den Formeln a) oder b) w successive aus w' herstellen, wollen wir nun symbolisch mit Namen belegen. Es bedeute Tw' den Übergang zum recipro-

$w = S^{u_1} T S^{u_2} T \ldots S^{u_n}$

$w = S^{u_1} T S^{u_2} T \ldots S^{u_n}$

Bei den Formeln ist ge
die Operation T eine gera
Malen (nämlich n mal
vorkommt. Dies folgt übri
digkeit schon daraus, daß
te der Substitution

$$w = \frac{\alpha w^1 + \beta}{\gamma w^1 + \delta}$$

welche $+1$ ist, gleich wird a
aus den Determinanten al
stitutionen S und T. Nun
minante $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right| = +1$ und T
te $\left|\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right| = -1$. Daher muß T

Sprache der Substitutionentheorie folgendermassen aussprechen:

Jede ganzzahlige Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ von der Determinante 1 lässt sich zusammensetzen, indem man die Operationen S und T als „erzeugende Operationen" in geeigneter Combination und Wiederholung verwendet.

Derselbe Satz gilt natürlich auch, wenn wir von den gebrochenen Substitutionen der w und w' übergehen zu den homogenen Substitutionen der Variabeln (x, y) und (x', y'). Auch diese lassen sich aus den Substitutionen:

$$S \left| \begin{matrix} x = x' + y' \\ y = y' \end{matrix} \right| \text{ und } T \left| \begin{matrix} x = y' \\ y = x' \end{matrix} \right|$$

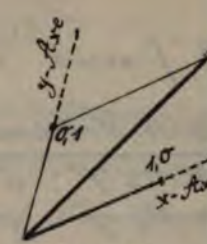
erzeugen nach dem Schema:

$(x, y) = S^{\mu_1} T S^{\mu_2} T \ldots S^{\mu_n} T (x', y')$ im Falle a)

$(x, y) = S^{\mu_1} T S^{\mu_2} T \ldots S^{\mu_n} (x', y')$ „ „ b).

Vgl. d. g. VII. Diese successive Erzeugung der Substitutionen hat auch eine einfache geometrische Bedeutung. Wir wollen uns dabei auf den Fall a) beschränken, weil der Fall b) ebenso zu behandeln ist. Für unsern Zweck ist es bequem, neben S als

massen symbolisch aus.
$(x^{\prime}y) = S^{u_1} S'^{u_2} S^{u_3} S'^{u_4}$.
Um diese Formel geometris
führen wir den Begriff: „
<u>des Coordinatensystems</u>"
hen unter der Elementarfi
zweier Vectoren, des Einh
$x^{\prime}$- und der
y-Axe. Bei
den Operationen
S und S' wird
diese Elementar-
figur in einfa-
cher Weise geän-
dert. Bei



Operation S

die Coordinaten $x' = 1, y = 0$), der y- Vector dagegen wird geändert u. zw. entsteht der neue y- Vector aus dem alten, indem man zu dem letzteren den x Vector hinzufügt; (der Punkt $x' = 0, y' = 1$ hat im alten System die Coordinaten $x = 1, y = 1$.) Bei der Operation S' findet das Umgekehrte statt. In gleicher Weise wird S^u bez. S'^u den Übergang von einer Elementarfigur zu einer neuen bedeuten, wobei man zu dem y- (bez x)- Vector u - mal den x- (bez. y-) Vector hinzufügt, während man den x' (bez y-) Vector ungeändert lässt. Durch gesetzmässige Wiederholung solcher Übergänge entsprechend unserer symbolischen Gleichung, entsteht schliesslich die Elementarfigur des x', y' Systems aus der des x, y Systems.

Ein Zahlenbeispiel wird dies erläutern. Es sei

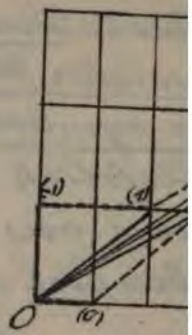
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Da hier vermöge $8 > 5$ der Fall a vorliegt, entwickeln wir $8/3$ in einen Kettenbruch von gerader Gliederzahl

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} .$$

rationen folgendermassen

Die ursprüngliche Elemen
aus den Strecken $0(0)$ un
ration S^2 bedeutet, dass
Strecke, den y-Vector, lä
seite $\overline{(-1)(1)}$ ver-
schieben. Die neue
Elementarfigur
besteht aus den
Strecken $0(0), 0(1)$.
Der Operation S'
entsprechend haben
wir an den Vector
$0(0)$ den Vector $0(1)$ anzusetzen
den ersteren längs der S



und $O(3)$ d. h. zu der Figur des x', y'-Coordinatensystems.

Wir erkennen: Die Erzeugung der Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ aus der Wiederholung und Combination der beiden Operationen S, S' kommt darauf hinaus, dass wir die Elementarfigur des neuen Systems aus derjenigen des alten erhalten, indem wir den y- und x-Vector des Coordinatensystems alternirend an den successiven Seiten der beiden zur Kettenbruchentwickelung von $\frac{\alpha}{\gamma}$ gehörenden Umrisspolygone entlang schieben.

Analog natürlich, wenn der Fall b) vorliegen sollte. —

Wir kommen nun zu einer letzten Eigenschaft der Kettenbruchentwickelung, welche von Lagrange in seinen „Additions à l'algèbre d'Euler" 1748, (Werke Bd 7) entwickelt worden ist. Diese Arbeit betrifft ganz besonders die Theorie der Kettenbrüche nach deren Bedeutung für die Zahlentheorie, sie ist in dieser Hinsicht grundlegend gewesen.

lineare Form

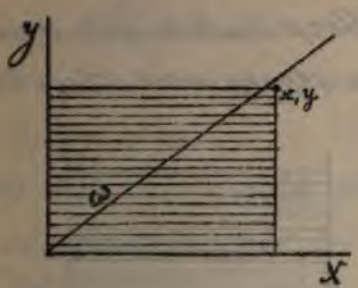
$$w\,y - x$$

den Wert Null offenbar n
men. Daher kann man n
Minimum von

$$|w\,y - x|$$

fragen. Allerdings wird e
les Minimum nicht geb
lässt man nämlich die g
x und y in geeigneter W
grösser werden, so wird
dem Werte 0 unbegrenz
Lagrange fragt daher na
lativen Minimum, d. h.
ganzen Zahlen x, y, für w

den Abstand des Punktes x, y von der w-Geraden bedeutet, so kann man die Frage geometrisch folgendermassen stellen: Es soll ein Gitterpunkt x', y' gefunden werden, welcher unter allen Gitterpunkten die im Innern oder auf dem Rande des Rechtecks mit den Seiten x', y liegen, den kleinsten Abstand von der w-Linie hat.



Wir werden sehen, dass die Hauptnäherungspunkte p_r, q_r der Kettenbruchentwicklung und nur diese die in Rede stehende Eigenschaft besitzen.

Wir wollen übrigens den Punkt p_r, q_r nicht nur mit den Punkten des Rechtecks, für welche $x' \leqq x$ und $y' \leqq y$ ist, vergleichen, sondern wollen noch die beiden ganzen Streifen hinzunehmen, für welche $x'' \leqq x$ oder $y' \leqq y$ ist. (vergl. die Figur, bei welcher wir p_r, q_r rechts von w genommen haben). Unsere Be-

ne Parallele zur w - Lin
dann nur solche Gitterp
in Betracht, welche in d
Parallelen und
der w - Linie aus
dem schraffirten
Gebiete ausge-
schnittenen schma-
len Streifen oder
auf seiner Begren-
zung liegen. Die-
ser Streifen fällt
aber ganz zwi-
schen die w - Linie und
convexen Polygonzug.

von w der nächste an w.

Der Beweis ad 2) wird insofern ein wenig umständlicher, als wir hier 2 Fälle unterscheiden müssen.

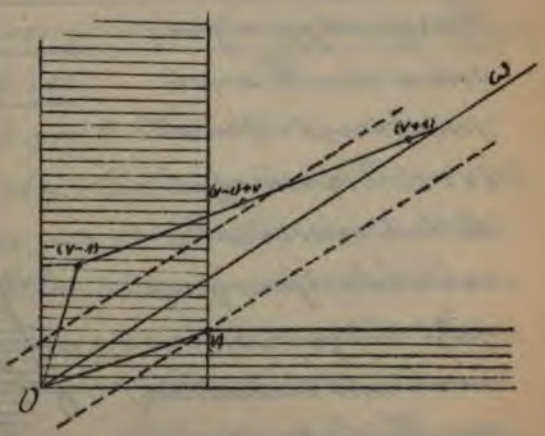
a) Die Polygonseite (ν-1) bis (ν+1) enthalte Nebenpunkte der Kettenbruchentwicklung in ihrem Innern, so daß in der Formel

$$(\nu+1) = (\nu-1) + (a_{\nu+1}(\nu)$$

$a_{\nu+1} > 1$ ist.

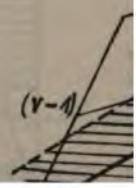
b) sie enthalte keine Nebenpunkte, wo dann $a_{\nu+1} = 1$ ist.

Wir ziehen jetzt auch links von der w-Linie eine Parallele zu dieser in demselben Abstande, wie vorher rechts davon. Dieselbe schneidet von der bis w verlängerten Polygonseite (ν-1)-(ν+1) ein Stück von der Länge O(ν) ab, wie aus unserer Construction der



schraffirten Gebietes. Daher f
rer Parallelen und der w
Streifen, soweit er schraffi
bis zwischen die w-Linie
Umrisspolygon. In diesem
telstreifens kann sich a
punkt befinden.

Im Falle 6) schneidet unse
Umrisspolygon zwi-
schen den Haupt-
punkten (ν-1) und
(ν+1). Der schraffir-
te Teil unseres Pa-
rallelstreifens greift
jetzt möglicherweise



sich für den übrigen Teil die Frage wie vorher erledigt, bleibt dieses Dreieck besonders zu untersuchen. Man setze zu dem Zwecke an die Seite $(\nu-1)$-$(\nu+1)$ des Elementarparallelogrammes $(0, (\nu-1), (\nu+1), (\nu))$ ein diesem congruentes Parallelogramm an. Unser fragliches Dreieck fällt dann ganz in das Innere des letzteren. In Folge dessen kann es keinen Gitterpunkt enthalten.

Damit ist bewiesen, dass jeder Näherungspunkt $x_r\ y_r$ ein relatives Minimum von $|wy - x|$ liefert.

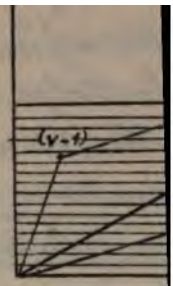
Es bleibt noch umgekehrt zu zeigen, dass jeder Gitterpunkt, welcher diese Eigenschaft besitzt, ein Näherungspunkt u. zw. ein Hauptnäherungspunkt ist.

Wir thun dieses in 2 Schritten und zeigen, dass weder ein Nebenpunkt noch überhaupt irgend ein anderer Gitterpunkt ausserhalb des Umrisspolygons zu einem relativen Minimum Anlass geben kann.

1.) Wir betrachten die zwischen $(\nu-1)$ und $(\nu+1)$ eingeschalteten Nebenpunkte, deren Lage durch

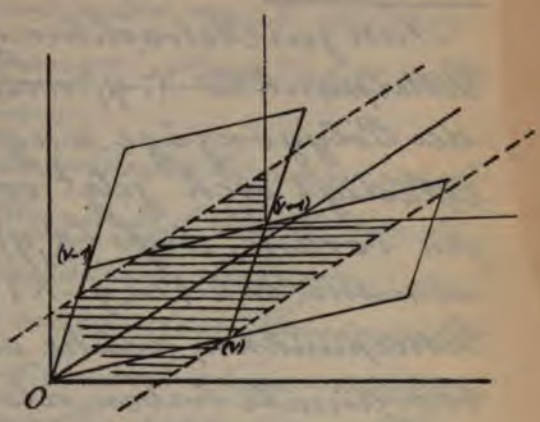
$$(\nu-1) + \varrho\,(\nu), \qquad \varrho = 1, 2, \ldots a_{\nu+1}-1$$

den (ν)ten Haupt-
punkt im Innern.
Denn nach der
vorstehenden For-
mel werden die
Coordinaten von
(ϱ) aus denen von
(ν) durch Hinzufügung poo
halten. Überdiess hat (ν)
Abstand von w wie (ϱ). D
reits bei der Figur auf po
Also liefert ein Nebenpunk
relatives Minimum von
2.) Denselben Nachweis erb
irgend welche Gitterpunk



mit den kleinsten Coordinaten x, y der Punkt $(\nu+1)$ ist.

Zu beiden Seiten der w-Linie grenzen wir unsere beiden Parallelstreifen ab, in denen die fraglichen Punkte sämtlich enthalten sein müssen. Sodann ziehen wir durch $(\nu+1)$ Parallelen zur x- und y-Axe. Diese schneiden aus den Parallelstreifen ein Stück aus, welches in der Figur schraffirt ist. Wir haben zu zeigen, daß in diesem Stück ausser (ν) und $(\nu+1)$ kein Gitterpunkt enthalten ist.



In der That, setzen wir an das Elementarparallelogramm $(0,(\nu-1),(\nu+1),(\nu))$ zwei congruente Parallelogramme längs der Seiten $(\nu-1)(\nu+1)$ und $(\nu)(\nu+1)$ an, so enthalten diese die beiden Zipfel des schraffirten Gebietes, welche über das erste Parallelogramm herausgreifen in ihrem Innern, wie man solches

Gitterpunkten, welche näh
als (r), derjenige mit der
dinaten.

Nun zur Betrachtung ei
Gitterpunktes x, y, welcher
der Polygonzüge angehö
erledigt sich jetzt von s
zen voraus, dass (x, y) ein
nimum von $|wy - x|$ erg
Gitterpunkten, welche eine
Coordinate haben, als der
wird es eine Reihe von Ho
rungspunkten geben. Se
in dieser Reihe, so dass
$q_r \leq y$, während $p_{r+1} > x$, w

sondern (x, y) derjenige mit den kleinsten Coordinaten. Dies steht aber in Widerspruch mit unserm vorhergehenden Resultat.

Somit ist bewiesen, dass kein anderer Gitterpunkt ein relatives Minimum unserer linearen Form ergeben kann, ausser den Hauptnäherungspunkten der Kettenbruchentwickelung. Es ist also auch die Umkehrung des Lagrange'schen Satzes vollständig dargethan.

Ich möchte im Anschlusse hieran noch eine Arbeit von Hurwitz (Math. Ann. Bd. 39 pg 279 u. f.) zur Sprache bringen, in welcher die Frage nach den Minimalwerten von $|wy - x|$ noch etwas weiter geführt wird. Das Resultat von Hurwitz lautet, in unsere Sprechweise übertragen: Man kann den Punkt x, y unter den Eckpunkten der Umrisspolygone immer so auswählen, dass

$$|wy - x| \leq \frac{1}{\sqrt{5}\, y}$$

wird. Construiren wir uns diejenigen Curven, welche dem Gleichheitszeichen entsprechen, d. h. die beiden Hyperbeln

sagt dann ein-
fach aus, dass
jedenfalls ein-
ge Eckpunkte
unserer Polygonzüge in bez. a
fen reichen. Jedenfalls wird
Beweis dieses Satzes bei Ben
Bildes besonders übersichtli

I. Hauptteil.

Wir kommen nun zu de
Thema dieser Vorlesung,

Reductionstheorie der

1. Geometrische Vorbegriffe.

Der zahlentheoretischen Betrachtung schicken wir einige geometrische Überlegungen von allgemeinem Charakter voraus, wie sie in allerdings viel umfassender Form in der Erlanger Programmschrift: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (abgedruckt in Ann. Bd. 43) entwickelt worden sind. Es handelt sich darum, die Gesamtwissenschaft der Geometrie nach allgemeinen mathematischen Gesichtspunkten einzuteilen, nicht darum, dieselbe vom philosophischen Standpunkte grundsätzlich aufzubauen. In diesem Sinne nehmen wir für das Folgende ein rechtwinkeliges Coordinatensystem als gegeben an; übrigens genügt es für unsere Zwecke von der Geometrie der Ebene zu handeln.

Unsere Einteilung ist eine gruppentheoretische. Wir unterscheiden soviele Arten von Geometrie, als es Gruppen von Operationen giebt, denen wir die geometrischen Gebilde unterwerfen mögen.

der Rechnung umerson
lässt also die Operation
gung und der Ähnlich
mation zu. Ihren anal
druck finden sie in den
$x' = aX + bY + c$ | $a^2 + a'$
$y' = aX + bY + c'$ | ab
Das x', y' und das X, Y-
entweder congruent ode
weder gleichstimmig o
stimmig.
Die hierdurch umgren
nen bilden eine Gruppe,
gruppe heisst. Die Haup
fasst alle diejenigen O

der Hauptgruppe. Durch diese Beziehung zur Hauptgruppe unterscheidet sich die Geometrie der Ebene von einer individuellen Betrachtung der Wertsysteme x, y. Elementargeometrie, so können wir auch sagen, ist Invariantentheorie der Hauptgruppe.

2.) Neben die Elementargeometrie stellt sich als zweite die affine Geometrie. Ihre Gruppe besteht aus sämtlichen affinen Transformationen, also aus den Umänderungen

$$x = ax' + by + c,$$
$$y = a'x' + b'y + c',$$

wo jetzt die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten in Wegfall kommen. Sie entstehen aus den Transformativen der Hauptgruppe durch Hinzunahme beliebiger Parallelprojectionen. Die affine Geometrie interessirt sich nur für solche Eigenschaften der Figuren, welche durch affine Operationen nicht zerstört werden.

3.) Die nächst höhere Geometrie ist die projective. Ihre Gruppe besteht

Zu den bisherigen Operati
die Centralprojectionen
In der projectiven Geometri
als wesentlich nur solc
an, welche auch bei belie
projection, also bei beliebi
rung des Augenpunktes
und beliebiger Stellung d
ebene erhalten bleiben.
successive fortgehen, in
Gruppe der Geometrie u
nen erweitert und jedes
riantentheorie dieser er
pe studirt. —
In der metrischen Ge

cheninhalt der Figuren invariant. Sehen wir nämlich von den constanten Gliedern in den Transformationsgleichungen ab, deren Hinzunahme nur eine Verschiebung, also eine Transformation der Hauptgruppe, bedeutet, so können wir sie schreiben:

$$x' = aX + bY$$
$$y = cX + dY.$$

Sind oo, xy, $x'y'$ die Ecken eines Dreiecks in ursprünglicher, oo, Xy, $X'Y'$ in transformirter Lage, so wird sein Inhalt

$$\frac{1}{2}(xy' - x'y) = \frac{1}{2}(ad - bc)(XY' - X'Y).$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks und, da man jede Figur aus einer Anzahl von Dreiecken zusammensetzen kann, auch der Flächeninhalt jeder Figur ändert sich bei affiner Transformation also nur um die Determinante der Substitution. Liegt der für das Spätere wichtige Fall vor, dass die Determinante gleich Eins ist, so bleibt der Flächeninhalt schlechtweg invariant.

Im Vorhergehenden gingen wir genetisch vor, indem wir durch succes-

allen Umformungen d
Gruppe erhalten bleiben
Standpunkte der affinen
überzugehen, adjungi
unendlich ferne Gerad
dementsprechend numm
Teil der projectiven Um
in Betracht, welche d
ferne Gerade in sich ü
entsprechender Weise ko
der affinen zu der met
trie, wenn wir die beide
adjungiren / vergl. au
Erlanger Programm /.
Dies Verfahren trägt

der unendlich fernen Geraden ebenso gut festhalten, als gerade die Kreispunkte. Wir gelangen dann nicht zur gewöhnlichen metrischen Geometrie, sondern zu einer allgemeinen, pseudometrischen (oder besser gesagt, wie Salmon ursprünglich wollte, zu einer quasimetrischen) Geometrie. Die gewöhnliche metrische Geometrie erweist sich dann als ein specieller Fall der letzteren.

Sind $x : y : t$ gewöhnliche homogen gemachte rechtwinklige Coordinaten, so werden die Kreispunkte bekanntlich durch die folgenden Gleichungen bestimmt: $x^2 + y^2 = 0$, $t = 0$. Entsprechend lautet der Ausdruck für die Entfernung in der gewöhnlichen Geometrie $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Statt der Kreispunkte wählen wir in der Pseudogeometrie die auf der unendlich fernen Geraden gelegenen Nullpunkte einer beliebigen quadratischen Form, d. h. die Punkte:

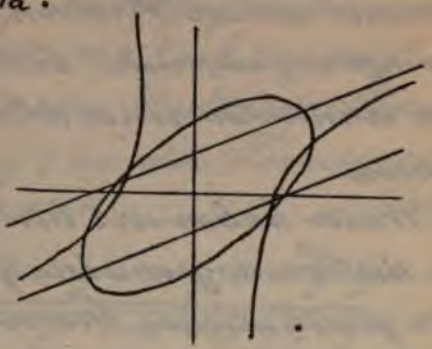
$$f = ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \quad t = 0,$$

als Grundpunkte der Maassbestimmung und definiren als Pseudoentfernung

menfallende Punkte sein
$b^2 - 4ac < 0, > 0$ oder $= 0$ is
ist die Form $f(x, y)$ eine
oder negative. Die Curve
Einheitskreise der gewöhnl
entspricht, wird, in der g
Maassbestimmung betra
se oder ein imaginärer C
nachdem f eine positive
Form ist. Wir werden u
tung auf den Fall der p
beschränken, weil die neg
auf diese zurückgeführt n
Wir wollen daher sagen:
wird der Pseudokreis r
dementsprechend nennen

schen Fall. Den dritten Fall werden wir als parabolischen bezeichnen. Die Curve $r^2 = 1$ besteht hier aus den beiden geraden Linien

$$ax + \frac{bz}{2} = \pm\sqrt{a}.$$



Damit haben wir den allgemeinen, man möchte sagen, souveränen Standpunkt der Cayley'schen Maassbestimmung bezeichnet. Das Wesentliche ist, daß wir die Maassbestimmung nicht als etwas durch die Natur der Ebene von vorneherein gegebenes ansehen, vielmehr durch freiwillige Festsetzung der Ebene auferlegen. Es wird unsere nächste Aufgabe sein, uns mit dem verschiedenen Charakter der dreierlei Fälle im Einzelnen vertraut zu machen.

1. Elliptischer Fall.

Die Entfernung eines Punktes x, y von dem Nullpunkte wurde bereits definirt durch die Gl. $r^2 = f(x, y)$. In entsprechender Weise werden wir für die Entfernung

Lipsen.

Weiter haben wir den Be
in die Pseudogeometrie zu
der gewöhnlichen Geomet
der Winkel zweier Strecke
$O(x', y')$ folgendermass

$$\varphi = \arccos \frac{x x' + y y'}{\sqrt{x^2 + y^2}\ \sqrt{x'^2 + y'^2}} = a$$

In unserer allgemeinen K
müssen wir natürlich den
ren, dass er in die vorst
übergeht, falls wir die Gr
Maassbestimmung duro
formation, also homoge
formation der x und y,

welcher Ausdruck die Polare des Punktes $x'y'$ in Bezug auf das Geradenpaar $x^2+y^2=0$ darstellt, die Polare $axx'+b(xy'+x'y)+cyy'$ in Bezug auf unser neues Geradenpaar $ax^2+bxy+cy^2=0$. Somit definiren wir den Winkel der Strecken $O(x,y)$ und $O(x',y')$ in der Pseudogeometrie folgendermaassen:

$$\varphi = \arccos \frac{axx'+\frac{b}{2}(xy'+x'y)+cyy'}{\sqrt{ax^2+bxy+cy^2}\,\sqrt{ax'^2+bx'y'+cy'^2}},$$

woraus sich noch als zweiter Ausdruck ergiebt:

$$\varphi = \arcsin \frac{(xy'-x'y)\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{ax^2+bxy+cy^2}\,\sqrt{ax'^2+bx'y'+cy'^2}}.$$

Zur Veranschaulichung wollen wir zusehen, was die Gleichheit zweier Winkel bedeutet. Wir wollen uns vom Mittelpunkte der Einheitsellipse eine Anzahl von Geraden zeichnen, welche im Sinne der Pseudogeometrie je gleiche Winkel mit einander bilden, also geradezu eine Winkelscala construiren. Die entstehenden Ellipsenvectoren sind dann im Sinne der Pseudogeometrie congruent, d. h. sie können

gleich. Denn die
Pseudodrehungen
machen einen ge-
wissen Teil der
affinen Transformationen
ausserdem die Determina
einen bestimmten Fläc
lich die Fläche der Fig
sich überführen. In Fol
bei unseren Drehungen
auch im Sinne der gewö
bestimmung der Flächen
guren invariant. Diese
dient dem Auge als e
wir, wie in der Figur
kelscala entwerfen wol

metrie, Ähnlichkeitstransformation und Spiegelung, anschliessen.

Diejenigen unter Ihnen, denen diese im Grunde sehr einfachen Begriffe ungewohnt sind, können sich dieselben vielleicht durch einen Vergleich mit der allgemeinen Flächentheorie näher bringen. Dort führt man bekanntlich als krummlinige Coordinaten eines Flächenpunktes irgend zwei Curvensysteme x und y ein und stellt das Linienelement, d. h. die Entfernung zweier benachbarter Punkte durch sie folgendermaassen dar:

$$ds = \sqrt{E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2},$$

wo die E, F, G im Allgemeinen Functionen von x und y sein werden. Unsere Maassbestimmung in der Ebene nun, in welcher

$$ds = \sqrt{a dx^2 + b dx dy + c dy^2}$$

wird, erweist sich als ein spezieller Fall jener, indem nämlich bei uns E, F und G constante Grössen sind. In analytischer Hinsicht ordnet sich

rischen Gestalt der Fläc
in unserem Falle dage
sie unsererseits durch
Willkür in die Fläche
derselbe Gedanke, den w
ne in Betracht kommt
rührten.

Eine bedeutende Verei
hen wir dadurch, daß
dratische Form f in z
Factoren spalten:

$$f(x,y) = \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\,y\right)(\sqrt{}$$

und diesen Factoren eine
Sinn beilegen. Jeder die
Null gesetzt, stellt eine
welche durch den einen
Grundpunkt auf der u

im Sinne unserer Maassbestimmung die paradoxesten Eigenschaften zu: sie haben beispielsweise die Länge Null und stehen auf sich selbst rechtwinklig, wie aus unseren obigen Definitionen von Entfernung und Winkel hervorgeht.

Dass diese Linien imaginär sind, soll uns nicht davon abhalten, mit ihnen geometrisch zu operiren. Wir werden dieselben sogar zu Axen eines Coordinaten-Systems, des „Minimalcoordinaten-Systems" machen. Die Minimalcoordinaten ξ und η definiren wir als Parameter in den beiden Geradensystemen, welche der einen oder anderen Minimallinie parallel laufen, wir setzen einfach

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sqrt{a}\,x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}\,y \\ \eta &= \sqrt{a}\,x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}\,y \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{so dass} \\ r = \sqrt{\xi\,\eta} \\ \text{wird} \end{array}$$

Die Minimalcoordinaten sind gewöhnliche (nur imaginäre) Parallelcoordinaten. Einem reellen Punkte der Ebene x und y entsprechen 2 conjugirt

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x - iy \\ \eta &= x + iy\end{aligned}\right\}.$$

Überall da, wo man
chen Geometrie der Ebene
plexen Aggregaten x
rechnet, können wir den
malcoordinaten reden.
Minimalcoordinaten is
der Functionentheorie,
nik etc. hinlänglich
unsere Zwecke liefern
Vereinfachungen. Wir
den Ausdruck für ein
Minimalcoordinaten
hung um O ist eine
tution in den x, y, al

minallinien ungeändert. Eine Drehung führt also $\xi = 0$ in $\xi' = 0$ über und $\eta = 0$ in $\eta' = 0$. Daher nimmt der Ausdruck für eine Drehung folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= m\xi \\ \eta' &= m'\eta \end{aligned}\right\}.$$

Berücksichtigen wir noch, dass die Determinante der Substitution gleich 1 und die Coefficienten conjugirt imaginär sein müssen, wenn anders die Drehung reelle Punkte in reelle überführen soll, so können wir die vorstehenden Gleichungen folgendermaassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= e^{i\varphi}\cdot\xi \\ \eta' &= e^{-i\varphi}\cdot\eta \end{aligned}\right\}.$$

Die reelle Grösse φ bedeutet den Drehungswinkel im Sinne unserer Maassbestimmung. Aus den vorstehenden Gl. folgt nämlich durch Addition

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{(\xi'\eta + \xi\eta')}{\xi\eta}$$

oder auch, da $\xi\eta - \xi'\eta' = r^2$:

Pendelwinkel im Anschl
Drehungssubstitution fo
definiren:

Der Winkel der beiden P
nach (ξ, η) und (ξ', η') is
tiplicirt mit dem Logar
Doppelverhältnisses, we
ten Strahlen mit den Kr
bilden. Aus unseren Su
meln folgt nämlich d
die Gleichung:

$$\tau = \frac{1}{2} \lg \left(\frac{\xi'}{\eta'} : \frac{\xi}{\eta} \right),$$

welche die neue Winkel a

führungen über die elliptische Maassbestimmung müssen wir bemerken, dass wir uns alle diese Einzelheiten hätten ersparen können. Wir hätten nämlich mit Zuhilfenahme projectiver Begriffe einfach folgendermassen sagen können. Wir erhalten die elliptische Maassbestimmung in einer Ebene, wenn wir eine mit gewöhnlicher Maassbestimmung ausgestattete Ebene durch Parallelprojection auf jene beziehen und die Maassverhältnisse aus der Originalebene auf die entsprechenden Stücke der Bildebene übertragen. Wir haben nur dafür zu sorgen, dass die Kreispunkte bei der Projection übergehen in die Grundpunkte der elliptischen Maassbestimmung. Dabei wird beispielsweise aus dem System concentrischer Kreise um O in der Originalebene das System ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen in der Bildebene werden; eine gewöhnliche Winkelskala congruenter Teile verwandelt sich in die elliptische

mung in der Originalebe

Zum Beweise dessen g
unsere Formeln für Min
zurück. Seien ξ, η die o
Minimalcoordinaten a
Maassbestimmung, Ξ,
Minimalcoordinaten in e
so dass

$$\Xi = X + iY, \quad H = X - i$$

wird; dann führt die Sub
$H = \eta$ die Grundpunkte
in die Kreispunkte der
und die elliptische Ma
verwandelt sich in d
Ausführlicher schreibt
tution folgendermassen

$$X \pm iY = \sqrt{a}\, x + b \pm i\sqrt{}$$

Es ist aber aus der projectiven Geometrie bekannt, dass dieses die Gleichungen einer Parallelprojection der $x'y'$- auf die xy Ebene sind. Eine mit elliptischer Maassbestimmung ausgestattete x', y'-Ebene kann also durch Parallelprojection stets in eine x', y'-Ebene mit gewöhnlicher Maassbestimmung übergeführt werden.

2. Hyperbolischer Fall, $b^2 - 4ac > 0$.

Dieselbe Betrachtungsweise liesse sich auch auf den Fall der hyperbolischen Maassbestimmung anwenden. Wir können die hyperbolische Ebene gleichfalls durch Parallelprojection in eine Ebene mit gewöhnlicher Maassbestimmung verwandeln, wobei der Übergang durch dieselben Transformationsgleichungen wie vorhin vermittelt wird. Diese Gleichungen enthalten jetzt aber in ihren Coefficienten die Quadratwurzel aus einer negativen Grösse. Die Projection wird daher jetzt eine imaginäre. Da aber die Verhältnisse bei einer imaginären Projection nicht ohne Weiteres anschaulich sind,

Den Abstand eines P
definiren wir nach wi
Ausdruck

$$r = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2}$$

Für die Punkte glei=
chen Abstandes be=
steht die Gleichung

$$ax^2 + bxy + cy^2 = C.$$

In dem besonde=
ren Falle $C = 0$ zer=
fällt die Curve
gleichen Abstandes
in 2 reelle gerade
Linien $\xi = 0, \eta = 0$;
es sind dieses die
„Minimallinien der Fu

zerlegen die Ebene in zwei Doppel-vectoren. In dem einen Doppelvector haben ξ und η gleiches, in dem anderen entgegengesetzten Vorzeichen.

Ist C von Null verschieden, so besteht die Curve gleichen Abstandes aus einer Hyperbel, welche die Minimallinien zu Asymptoten hat. Dieselbe liegt in dem ersten oder zweiten Doppelvector, je nachdem $C > 0$ oder $C < 0$ ist. Die Punkte des ersten Sectors haben daher von O einen reellen, die des zweiten einen imaginären Abstand.

Unter dem Winkel (φ) zweier von O auslaufender Strahlen verstehen wir hier wie im vorigen Falle den mit $\frac{1}{2}$ multiplicirten Logarithmus desjenigen Doppelverhältnisses, welches jene Strahlen mit den Minimallinien bilden. Hinsichtlich der Realität des Winkels müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

a. Beide Geraden liegen in demselben Doppelsector. Dann besitzt das

Zwei Strahlen, welche d
angehören, bilden als
von Multiplis der Z
einen rein imaginäre
6. Beide Geraden lieg
nen Sectoren. Dann is
verhältnis negativ;
$\log DV = \varrho \pm (2k+1)\pi$
und
$\tau = \frac{i\varrho}{2} \mp (k+\frac{1}{2})\pi.$
Zwei Strahlen, welche
malgeraden getrennt
also einen Winkel, d
standteil ein unger
von $\pi/2$ ist. Die Kon

der Minimallinien rücken, so wird das Doppelverhältnis 0 oder ∞. Der zugehörige Winkel ist also allemal unendlich gross.

Wollen wir, was später bequem sein wird, den imaginären Winkel ε durch eine reelle Grösse ψ ausdrücken: $\varepsilon = i\psi$, so müssen wir natürlich auch den $\sin\varepsilon$ durch $\sin i\psi = \mathfrak{sh}(\psi)$ ersetzen. In den trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie sind also dann die trigonometrischen Functionen durch die sog. hyperbolischen zu ersetzen.

Durch die Minimalcoordinaten ξ und η drückt sich der Winkel wieder besonders einfach aus. Es wird nämlich

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} \lg \left(\frac{\xi}{\eta} : \frac{\eta'}{\xi'} \right)$$

Wollen wir nun auch eine <u>hyperbolische Winkelskala</u> construiren, so zeichnen wir uns zunächst die Einheitshyperbel $r^2 = 1$. Einen von O aus nach dieser verlaufenden

der Endpunkt
des Vectors auf
der Hyperbel
fortgleitet. Die von der
schriebenen Flächen, we
der hyperbolischen Haar
congruent sind, bleib
der gewöhnlichen Haar
inhaltgleich. Danach i
der Winkelskala zu en

Wenn wir solcher Weise a
tor fortgesetzt um den g
weiter drehen, bringen
der Minimallinien im
sie jedoch jemals zu er
der Flächeninhalt wel

Bei einer endlichen Anzahl endlicher Drehungen überstreichen wir aber mit unserem Radius-Vector nur eine endliche Fläche. Wir gelangen also, so oft wir auch drehen mögen, niemals bis in die Kiminallinie hinein. Daraufhin verstehen wir auch, warum die Kiminallinie mit jeder Geraden einen unendlich grossen Winkel bilden muss.

Der analytische Ausdruck für eine Drehung um O ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung für den Winkel zweier von O auslaufenden Geraden. Danach besteht zwischen einem Punkte $\xi' \eta'$ der um φ gedrehten Geraden und einem Punkte $\xi \eta$ der Geraden vor der Drehung die Relation:

$$\frac{\xi'}{\eta'} = e^{2i\varphi} \cdot \frac{\xi}{\eta} .$$

Spalten wir diese Gleichung so, dass $\xi \eta = \xi' \eta'$ wird, so erhalten wir die Coordinaten ξ', η' desjenigen Punktes, in den der Punkt ξ, η durch die Drehung übergeführt wird, nämlich

$$\eta' = e^{+\frac{\pi}{5}i} \cdot \xi = \tau_5 \eta .$$

Dieses sind die Gleichu
hungssubstitution. Si
die Drehung in der hy
Geometrie eine operiv
wie in der gewöhnliche
schen Geometrie eine p
ration ist.

Neben der Drehung
die Operation der Spi
Spiegelung definiren n
hung, verbunden mit
schung von ξ und η
mationsgleichungen
werden also

Linien, welche ungeändert bleiben, nämlich die Linien

$$\frac{\xi}{\eta} = +\varrho \quad \text{und} \quad \frac{\xi}{\eta} = -\varrho .$$

Die erste dieser Linien geht bei der Spiegelung Pünkt für Pünkt in sich über. Wir haben nämlich unter m einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$\xi = m\varrho \quad \eta = m \quad \text{und daher} \quad \xi' = m\varrho = \xi \quad \eta' = \varrho = \eta .$$

Die zweite Linie geht in der Weise in sich über, dass der Pünkt ξ, η mit dem Pünkte $-\xi, -\eta$ vertauscht wird. Zu den Minimalgeraden liegen diese beiden Linien <u>harmonisch</u>. Man überzeugt sich leicht, dass der so definirten Operation in der gewöhnlichen Geometrie die gewöhnliche Spiegelung, dass der ersten Linie die Spiegelungsaxe, der zweiten die dazu Senkrechte entspricht.

<u>3. Parabolischer Fall. $b^2 - 4ac = 0$.</u>

Im parabolischen Falle wird die Form $ax^2 + bxy + cy^2$ ein vollständiges Quadrat. Der Ausdruck für die Entfer-

gleich einer Entfernung
ξ von der Minimallinie.
Die Entfernung zweier Punk
te p und p' von einander
ist gleich $\xi - \xi'$. Schalten wi
noch beliebige andere Punk
te $p_1 .. p_2$ ein, so wird jetzt
p von p' gleich der Entf
der Entfernung p_2 von

$$\xi - \xi' = \xi - \xi_1 + \xi_1 - \cdots$$

Wir kommen also zu d
Resultat, dass die Weg
2 Punkten in der par
bestimmung unabhä
dem zurückgelegten
von der Lage des An

Wollen wir den Winkel zweier in O zusammenlaufenden Geraden berechnen, so müssen wir die zusammenfallenden Kürzesten des parabolischen Falles als Grenzfall zweier nicht zusammenfallender Linien auffassen. Seien daher die Kürzesten zunächst

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \eta = \xi + \varepsilon\zeta = 0.$$

Den Winkel definiren wir dann wie früher durch:

$$\tfrac{1}{2} \lg \left(\frac{\xi}{\xi + \varepsilon\zeta} \cdot \frac{\xi' + \varepsilon\zeta'}{\xi'} \right),$$

wo unter ε eine zu Null abnehmende Grösse bedeutet. Wollen wir zu einer vernünftigen Winkeldefinition kommen, so müssen wir eine mit ε variable Maasseinheit einführen. Wir schreiben daher:

$$C \left\{ \lg\left(1 + \varepsilon \frac{\xi'}{\xi'}\right) - \lg\left(1 + \varepsilon \frac{\zeta}{\xi}\right) \right\} = C\varepsilon \left(\frac{\xi'}{\xi'} - \frac{\zeta}{\xi} \right) + \cdots$$

und setzen fest, dass $C\varepsilon$ gleich einer festen Grösse k sei. Unter dem Winkel verstehen wir daher hier die Grösse

$$k \left(\frac{\xi'}{\xi'} - \frac{\zeta}{\xi} \right),$$

in welcher ξ und η den Abstand von der Minimallinie $\xi = 0$ und von einer Hülfsgeraden $\eta = 0$ bedeutet. Der Winkel wird jetzt eine algebraische Function der Coordinaten, während er früher eine transcendente war. —

Freib. d. 22. XI. Wir kehren nunmehr zur Zahlentheorie zurück und machen uns zunächst in arithmetischer Formulirung mit dem fundamentalen Problem aus der Theorie der binären quadratischen Formen, mit dem wir uns hier in erster Linie ausführlich beschäftigen müssen, dem „Aequivalenzproblem" bekannt. Es handelt sich um Folgendes: Gegeben seien zwei Formen

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$
$$f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2,$$

in welchen wir unter $x, y, \ldots$, ganze Zahlen verstehen wollen, während wir die Coefficienten $a, b, c \ldots$ nicht ausschliesslich als ganzzahlig voraussetzen werden. Können diese Formen durch eine Substitution:

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$\eta = \gamma x' + \delta y'$$

mit reellen ganzzahligen Coefficienten von der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

in einander übergeführt werden? Wenn dieses der Fall ist, nennen wir die Formen f und f' aequivalent u. zw. eigentlich oder uneigentlich aequivalent, je nachdem die Determinante der Substitution $+1$ oder -1 ist.

Eine Vorbedingung für die Aequivalenz beider Formen leiten wir aus der Betrachtung der Ausdrücke $b^2 - 4ac$ bez. $b'^2 - 4a'c'$ her. Ihr Vorzeichen entscheidet bekanntlich über die Realität der Wurzeln von $f = 0$ bez. $f' = 0$, sie werden daher als Discriminanten bezeichnet. Nun ändert aber unsere reelle Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ an der Realität der Wurzeln nichts. Sollen daher die Formen f und f' bei der Substitution identisch werden, so müssen sie von vornherein in dem Vorzeichen ihrer

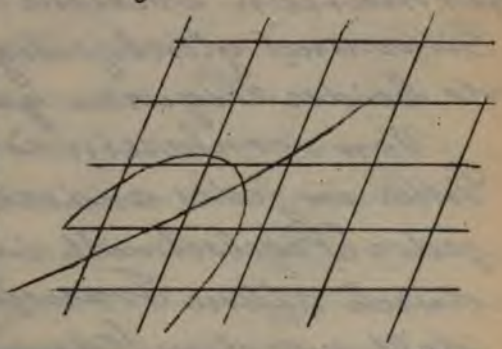
darüber hinaus, dass
minante einer Form ein
Bildung ist, dass sie
einer linearen Substi
eine Potenz der Substi
minante ändert. W
unter A, B, C die C
der transformirten
nämlich

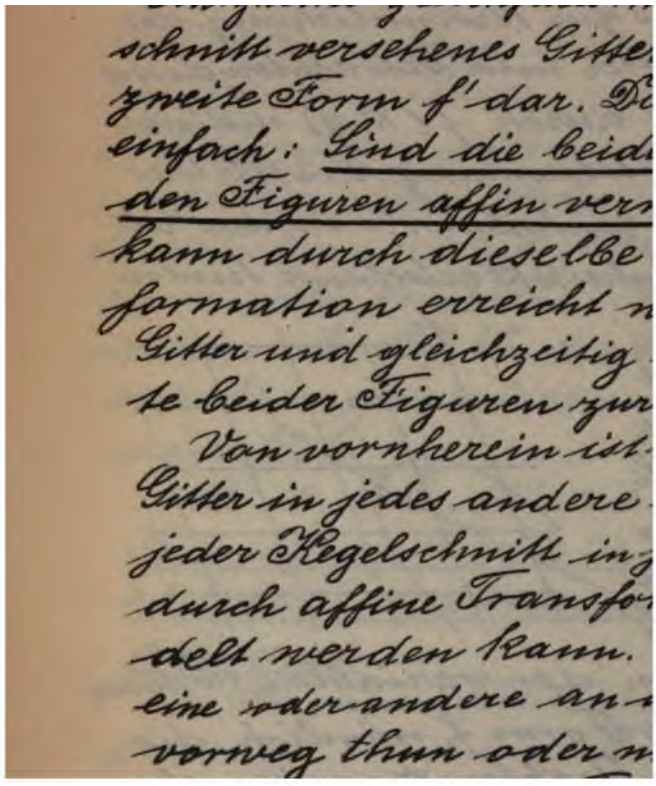
$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4a$$

In unserem Falle (a
also die Discriminan
geändert.

Die Gleichheit der Disc
f und f' $b^2 - 4ac = b'$

genden Theorie ist es gerade, die feineren Kriterien anzugeben, welche ausserdem für die Aequivalenz erforderlich sind. Wir übertragen die Frage sogleich in's Geometrische. Wir ziehen uns zur Versinnlichung der Form f ein Gitter und betrachten dieses im Sinne der durch $f(x, y)$ indicirten Maassbestimmung. Um letzteres anzudeuten, zeichnen wir in das Gitter unsern Einheitskegelschnitt hinein, welcher nach Umständen eine Ellipse, Hyperbel oder ein Linienpaar sein kann. Das Gitter repräsentirt uns gewissermassen den variablen Bestandtheil unserer Form f, nämlich die Paare ganzer Zahlen x und y, der Kegelschnitt den festen Bestandtheil, nämlich die Coefficienten a, b, c. Von dem Gitter kommen bei der sogleich zu nennenden affinen




schnitt versehenes Gitte
zweite Form f' dar. D
einfach: Sind die beid
den Figuren affin ver
kann durch dieselbe
formation erreicht
Gitter und gleichzeitig
te beider Figuren zu
Von vornherein ist
Gitter in jedes andere
jeder Kegelschnitt in
durch affine Transfo
delt werden kann.
eine oder andere an
vorweg thun oder

te. Giebt es eine affine Transformation, welche Gitter in Gitter und gleichzeitig Kegelschnitt in Kegelschnitt überführt.[2]

II. Gegeben ein Gitter und 2 Kegelschnitte. Gesucht eine affine Transformation, welche das Gitter ungeändert lässt und den einen Kegelschnitt in den anderen überführt.

III. Gegeben 2 Gitter und ein Kegelschnitt. Es handelt sich darum durch eine affine Transformation, welche den Kegelschnitt (und natürlich seinen Mittelpunkt O) ungeändert lässt, das eine Gitter in das andere zu verwandeln. Eine solche Transformation ist aber im Sinne der durch den Kegelschnitt repräsentirten Maassbestimmung eine Bewegung; sie ist genauer gesagt, eine Drehung, wenn sie die Determinante +1, eine Spiegelung, wenn sie die Determinante −1 hat. Im Falle der „Aequivalenz" müssen also unsere 2 Gitter bei dieser Art

mit welcher die elemen
hebt, nämlich vor die
zwei Figuren congru
Die verschiedenen Richt
wir das vorliegende Pro
und III in Ansatz Br
chen genau den allge
lizungen in S. 1, 2 me
Programms. Es war n
nicht bekannt, daß e
auch in der Zahlentl
sein könnten. Wenn m
lichen, algebraischen
geht, so kommt ma
als einziges Objekt d

bestehen. Ein ebenso interessantes Forschungsgebiet für den Geometer bilden aber ersichtlich auch Gebilde aus unendlich vielen discreten Bestandteilen wie unser Punktgitter. Sobald man nur diese mit berücksichtigt, erlangen die Begriffsbildungen der Geometrie sofort auch in der Arithmetik ihre Bedeutung, es verschwindet überhaupt der specifische Gegensatz zwischen beiden Gebieten.

Da die III. Formulirung des Aequivalenzproblemes eine besonders anschauliche war, werden wir im Folgenden diese vor dem anderen bevorzugen. Wir wollen zusehen, wie in diesem Falle die Elementarfigur des Coordinatensystems gestaltet ist, wie wir also den Einheitsvector der x und y-Axe zu wählen haben, damit der gerade hingezeichnete Kegelschnitt die Gleichung

$$f = a x^2 + b x y + c y^2 = 1.$$

ren ferner wird nach
durch

$$\cos \varepsilon = \frac{b}{2\sqrt{ac}} .$$

Alle 3 Grössen sind n
Sinne der durch den
ten Kegelschnitt gege
bestimmung zu vers
Angabe dieser 3 Grös
ter bis auf das willkü
lende Azimuth des x-
Der Inhalt des Elem
logramms berechnet s
Maassbestimmung
der gewöhnlichen dur

III durch Bewegung zur Deckung gebracht werden können, so müssen sie von vornherein jedenfalls flächengleiche Elementarparallelogramme haben; denn ihr Inhalt bleibt bei der Bewegung und andererseits bei beliebig geänderter Auswahl des Elementarparallelogramms ungeändert. Die Gleichheit von D', welche wir bereits oben auf Grund der Invariantenmatur der Discriminante constatirten, erweist sich hiernach auch geometrisch als eine nothwendige Vorbedingung für die Möglichkeit der „Äquivalenz".

Specielle und in der Litteratur vorkommende Fälle unserer Kegelschnitt-Gitter-Figur sind diese:

Im elliptischen Falle, wir legen statt der Ellipse einen Kreis zu Grunde; dann bedeuten Va, Vc und $\frac{b}{2Vac}$ Seitenlängen und Winkelgrössen der Elementarfigur in gewöhnlicher Maassbestimmung. Lassen wir dann noch den Kreis als etwas Selbstverständliches weg, indem wir momentan von

bekommt. Dem Punkte $x=1, y=0$ entspricht als Entfernung von 0.

$$r = \sqrt{a},$$

dem Punkte $x=0, y=1$ ebenso:

$$r = \sqrt{c};$$

der Winkel der beiden Einheitvectoren ferner wird nach pg. 61. gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{b}{2\sqrt{ac}}.$$

Alle 3 Grössen sind natürlich im Sinne der durch den hingezeichneten Kegelschnitt gegebenen Maassbestimmung zu verstehen; durch Angabe dieser 3 Grössen ist das Gitter bis auf das willkürlich zu wählende Azimuth des x-Vectors festgelegt.

Der Inhalt des Elementarparallelogramms berechnet sich in unserer Maassbestimmung ebenso wie in der gewöhnlichen durch die Formel:

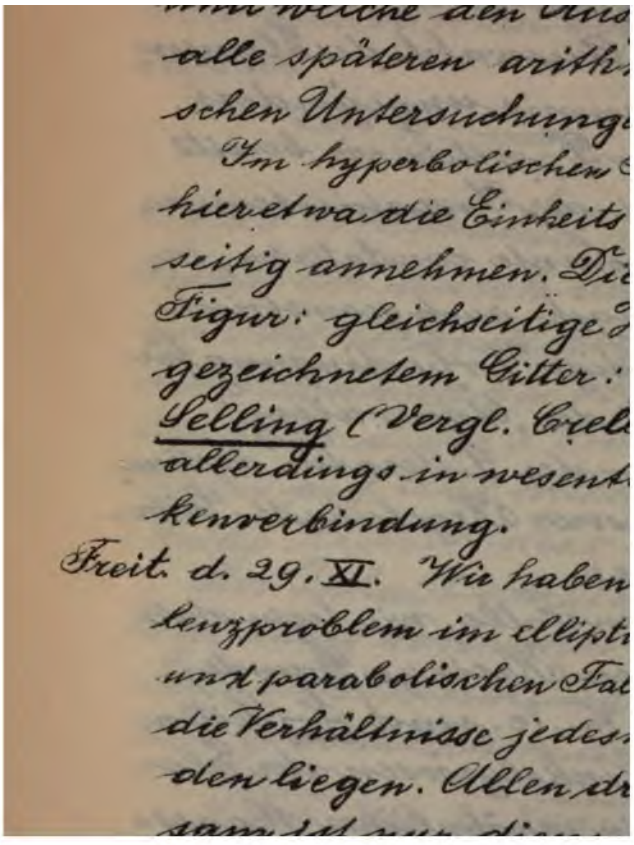
$$\sqrt{ac}\,\sin\varphi = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2} = \frac{\sqrt{-D}}{2}$$

Sollen unsere beiden zu f und f' gehörigen Gitter im Sinne des Ansatzes

III durch Bewegung zur Deckung gebracht werden können, so müssen sie von vornherein jedenfalls flächengleiche Elementarparallelogramme haben; denn ihr Inhalt bleibt bei der Bewegung und andererseits bei beliebig geänderter Auswahl des Elementarparallelogramms ungeändert. Die Gleichheit von D, welche wir bereits oben auf Grund der Invariantenmatur der Discriminante constatirten, erweist sich hiernach auch geometrisch als eine nothwendige Vorbedingung für die Möglichkeit der „Äquivalenz".

Specielle und in der Litteratur vorkommende Fälle unserer Kegelschnitt-Gitter-Figur sind diese:

Im elliptischen Falle, wir legen statt der Ellipse einen Kreis zu Grunde; dann bedeuten Va, Vc und $\frac{b}{2Vac}$ Seitenlängen und Winkelgrössen der Elementarfigur in gewöhnlicher Maassbestimmung. Lassen wir dann noch den Kreis als etwas Selbstverständliches weg, indem wir momentan von



alle späteren arith
schen Untersuchung
Im hyperbolischen
hier etwa die Einheits
seitig annehmen. Di
Figur: gleichseitige
gezeichnetem Gitter:
Selling (Vergl. Crel
allerdings in wesent
Kenverbindung.
Freit. d. 29. XI. Wir haben
Lenzproblem im elliptis
und parabolischen Fal
die Verhältnisse jedes
den liegen. Allen dr

Kettenbruchentwickelung stützt. Da der parabolische Fall meistenteils vernachlässigt wird, wollen wir gerade mit diesem beginnen und nachher auf den hyperbolischen und elliptischen Fall kommen, (indem wir also auch hier die gewöhnliche Reihenfolge umkehren).

2. Das Äquivalenzproblem im parabolischen Falle.

Die parabolische Entfernung war

$$r = Vf = Ax + By.$$

Bei der Construction der (zusammenfallenden) Fundamentalsbrahlen

$$Ax + By = 0$$

ergibt sich eine wesentliche Fallunterscheidung, jenachdem A und B commensurabel oder incommensurabel sind. Im ersten Falle gibt es auf der Fundamentallinie unendlich viele im zweiten Falle gar keine Gitterpunkte (ausser 0).

Die Frage nach der Aequivalenz zweier Formen wird dann allemal so beantwortet, dass man die gegebenen Formen in eine gewisse, eindeutig definirte Normalform bringt oder wie man

Ihnen von der Geom
geläufig. Wenn sie z
wollen, ob zwei ana
Kegelschnitte geomet
sind, können Sie a
daß Sie beide Kegel
die Hauptaxen trans
die transformirten G
tisch, so waren es die
vor der Transformati
schieden, so sind a
schnitte gewiss verse
1ter Fall. Wenn A u
surabel sind, so ist
einer Normalform s

m eine geeignete rationale Zahl ist. Zu den Zahlen α und β wissen wir zwei andere Zahlen γ und δ zu finden von der Beschaffenheit, dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

wird. Machen wir nun die affine Transformation

$$X = \alpha x + \beta y, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$
$$Y = \gamma x + \delta y,$$

so ergiebt sich als reducirte Form die folgende:

$$r = m X.$$

Sei ferner eine zweite parabolische Form f' gegeben, für welche

$$r' = \sqrt{f'} = A'x' + B'y'.$$

Durch eine neue Transformation $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ bringen wir auch r' in die Form

$$r' = m' X.$$

Das Resultat dieser Betrachtung ist folgendes:

<u>Zwei parabolische Formen f und f' sind dann und nur dann aequivalent, wenn ihre Multiplicatoren m und m' übereinstimmen.</u>

Die Kettenbrüche (Umrisspolygone)

$r = A(x - \omega y)$,

wo $\omega = -\frac{B}{A}$ eine irrati

Eine zweite Linearform

$r' = A'(x' - \omega' y')$

Sollen r und r' aequ

müssen jedenfalls an

gen Werte von ω und

der durch eine linear

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ zusammen hänge

sen, wie wir kurz sagen,

Eine notwendige Bed

quivalenz beider For

die Gleichung:

$$\omega = \frac{\alpha \omega' + \beta}{\gamma \omega' + \delta}, \quad \alpha \delta$$

Um zu entscheiden, ob diese Bedingung erfüllt ist, markiren wir uns in der x, y Ebene sowohl wie in der $x'y'$ Ebene die Gitter der ganzzahligen Punkte und legen durch sie die beiden w-Linien hindurch

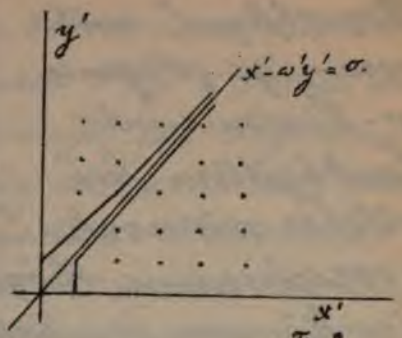


Fig. 2

$x - wy = 0$ und $x' - w'y' = 0$

Die Frage ist nun: können diese beiden Figuren durch Parallelprojection zur Deckung gebracht werden? Dabei kommt es lediglich darauf an, die

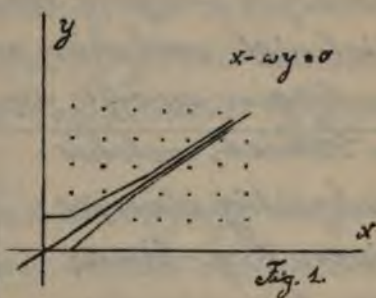
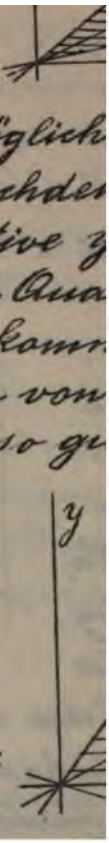


Fig. 1.

Punktgitter und die w-Linien in einander überzuführen; die Coordinatenaxen, welche nichts mit der Aequivalenzfrage zu thun haben, dürfen auch nach der Transformation verschieden sein.

Punktgittern, bei
welcher wir noch
4 verschiedene Möglich
den können, je nachde
Axe oder die positive
Innere des ersten Qua
Ebene zu liegen kom
Gleichviel welcher von
vorliegen möge, so g
ein Gebiet, welches
gleichzeitig dem po
sitiven x, y - Qua
dranten und dem
positiven $x' y'$ -
Quadranten ange
hört. In der ersten



der von der x^1- und x^2- Axe eingeschlossene schraffirte Sector.

Nun construiren wir im ersten Quadranten der x, y- Ebene und im ersten Quadranten der x', y'- Ebene die Umrisspolygone (vergl. die Figuren der Seite 97), welche die w- Linie und die w' Linie umgeben. Dieselben sind, wie wir wissen, durch die Lage dieser Linien im Punktgitter völlig bestimmt. In unserer Doppelfigur, wo die w- Linien und die Punktgitter zusammenfallen, werden daher auch die Umrisspolygone identisch, soweit sie im schraffirten Gebiete liegen.

Diese Thatsache haben wir jetzt in's Arithmetische zu übersetzen, indem wir an die zu den Umrisspolygonen gehörigen Kettenbruchentwickelungen denken. Die Teilnenner $(a_1, (a_3, (a_5 \ldots (a_2, (a_4, (a_6 \ldots$ des Kettenbruchs haben in der Figur des Umrisspolygons ihre bestimmte Bedeutung. Wenn also, wie wir sahen, die Umrisspolygone von w und w'

93987

folgenden Resultat.:

Sollen zwei irrationa
w' aequivalent sein, s
falls erforderlich, dass
von einer bestimmten
werden.

Man erkennt aber a
diese Bedingung hinre
seien nämlich die Ke
wickelungen

$$w = u_1 + \frac{1}{u_2 + \ldots + \frac{1}{u} + \frac{1}{R}}, \quad w$$

dann haben wir, wie f
Bezeichnung:

aequivalent sind. Ebenso sind auch w und Λ' aequivalent. Setzen wir nun voraus, dass die Kettenbrüche von einer gewissen Grenze ab übereinstimmen, dass etwa $\Lambda = \Lambda'$ wird, so folgt daraus sofort, dass w und w' unter einander aequivalent sind. Die Determinante der affinen Substitution $w = S(w')$ ist dabei gleich dem Producte aus den Determinanten der Substitutionen $w = S_1(\Lambda)$ und $w' = S_2(\Lambda')$; sie ist also gleich $(-1)^{r+r'}$. Danach sind w und w' eigentlich aequivalent, wenn r und r' gleichzeitig gerade oder ungerade sind; sie sind uneigentlich aequivalent, wenn eine der Zahlen r und r' gerade, die andere ungerade ist. Ersteres findet in Figur 1 von pg. 98. statt. Wenn hier nämlich der erste Eckpunkt der Polygonzüge, welcher in das schraffirte Gebiet fällt, rechts von w liegt, so sind r und r' beide gerade; wenn er links von w fällt, so sind r und r' beide ungerade.

uneigentlich aequival
nachdem der Sinn, in
den x, w, y und die
auf einander folgen,
der entgegengesetzte
Wir haben schliefslich
weitere Bedingung zu
der Zahlen w und w'
muss, damit auch die
x und x' aequivalen
Umkehrung der Subst
von pg. 101 ergibt sich

$$\Lambda = \frac{-w g_{r-1}^{-1} p_r}{w g_r - p_r}$$

oder wegen der urspr
tung von w

$$\lambda' = -\frac{A' p'_{r'-1} + B' q'_{r'-1}}{A' p'_{r'} + B' q'_{r'}}$$

Ist nun $\lambda = \lambda'$, so können wir zunächst nur schliessen

$$\frac{A p_{r-1} + B q_{r-1}}{A p_r + B q_r} = \frac{A' p'_{r'-1} + B' q'_{r'-1}}{A' p'_{r'} + B' q'_{r'}}.$$

Die Nenner dieses Ausdruckes bedeuten die Werte der Linearformen r und r' im Punkte (r). Sollen die Formen aequivalent sein, so müssen diese Werte übereinstimmen. Stimmen aber die Nenner (oder die Zähler) jenes Ausdruckes überein, so folgt auch für alle folgenden Näherungspunkte die Gleichheit von r und r'

Wir erkennen daraus: <u>Sind w und w' aequivalent so sind es auch die Linearformen r und r', vorausgesetzt, dass sie in einem der zugehörigen gemeinsamen Näherungspunkte denselben Wert haben.</u>

3. Das Äquivalenzproblem im hyperbolischen Falle.

Wir betrachten eine Form vom hyper-

statt haben.

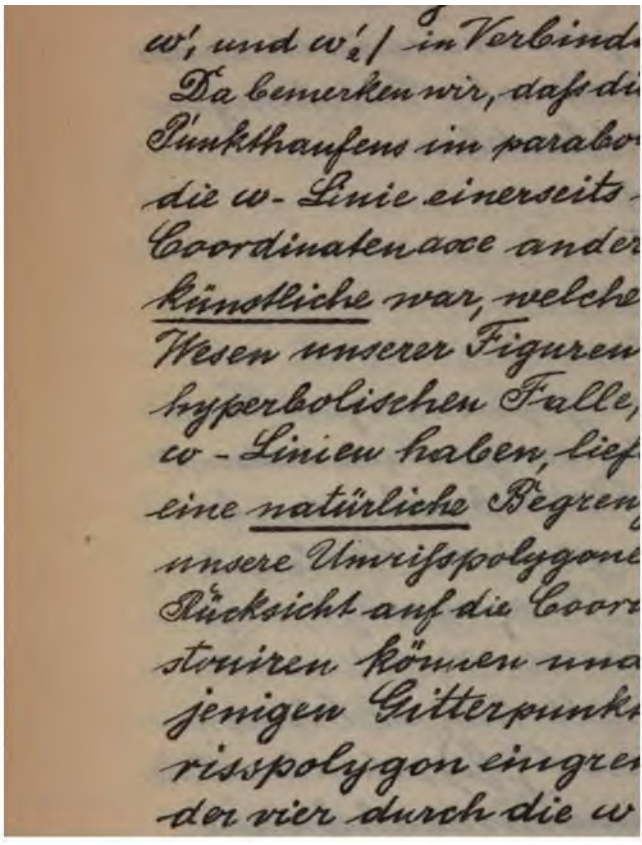
Die Wurzeln der Glei
sern uns die Fundamen
$x^{1}/y = w_1$ und $x^{1}/y = w$
Fällen welche hier zu
wären: beide Zahlen
– eine Zahl rational,
tional, – beide Zahlen
len wir nur den letzt
Übrigens scheidet, wenn
ganzzahlig sind, der zu
selbst aus, während sie
dahin specialisirt, daß
tionalen Zahlen conju
litäten werden.

Wir construiren uns in der x, y- und in der x', y'- Ebene die Linien w_1, w_2 und w_1', w_2' und markiren ausserdem die Punktgitter. Sollen die so entstehenden Figuren affin verwandt sein, so müssen ausser den Punktgittern auch die w- Geraden paarweise in einander übergehen. Es müssen also Gleichungen der folgenden Art bestehen:

$$w_1 = \frac{\alpha w_1' + \beta}{\gamma w_1' + \delta}$$

$$w_2 = \frac{\alpha w_2' + \beta}{\gamma w_2' + \delta}$$

Eine solche Gleichung zwischen zwei Grössen w besteht, wie wir im vorigen Falle sahen, dann, wenn die Kettenbruchentwicklungen von einer gewissen Stelle ab übereinstimmen. Vorausgesetzt, dass dieses bei den Paaren w_1, w_1' und w_2, w_2' einzeln statt hat, so können die Substitutionen $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$, durch welche die beiden w zusammenhängen, noch verschieden ausfallen. Für die vorliegende Frage aber müssen wir, den letztgenannten Gleichungen ent-


w', und w'₂ / in Verbind
Da bemerken wir, dass di
Punkthaufens im parabo
die w- Linie einerseits
Coordinatenaxe ander
künstliche war, welche
Wesen unserer Figuren
hyperbolischen Falle,
w - Linien haben, lief
eine natürliche Begren
unsere Umrisspolygone
Rücksicht auf die Coor
struiren können und
jenigen Gitterpunkt
risspolygon eingre
der vier durch die w

endliche erstrecken und übrigens paar-
weise einander gleich werden. Solche
Umrisspolygone haben wir in der x, y-
und in der x', y'- Ebene. Sollen die
Figuren der beiden Ebenen affin ver-
wandt sein, so müssen diese natürli-
chen Umrisspolygone in einander pro-
jicirt werden können.

d. 5. XII. Wir beschäftigen uns im Folgen-
den mit dem geometrischen Studium der
natürlichen Umrisspolygone, wobei wir
bequemer Weise an die bereits unter-
suchten Eigenschaften der Kettenbruch-
polygone anknüpfen werden. Da von
den 4 Polygonen je zwei mit einander
congruent sind, brauchen wir nur von
2 Polygonen zu sprechen (die wir vorü-
bergehend P und P' nennen)

Wir beginnen damit, ein für unsere Be-
trachtung geeignetes Coordinatensystem
zu definiren. Wir wählen als Einheits-
vector der x- Axe die Strecke von
O nach irgend einem Gitterpunkte auf
einem der beiden Umrisspolygone
(sagen wir auf P). Schreiten wir

nach diesem Gitter-
punkte ziehen wir
durch O eine Paral-
lelstrecke. Der End-
punkt der letzteren
fällt gleichfalls auf einen
auf einen Gitterpunkt
nes P'. Diese Parallel
als Einheitsvector der
Es zeigt sich, dass da
heitsvectoren bestimmte
in seinem Innern k
enthalten kann. Für
Figur schraffirte) Hä
gramms ist dieses
schaften der Umris

Gitterpunkt in ihrem Innern nicht enthalten. Das so definirte Coordinatensystem besitzt daher ein Elementarparallelogramm vom Flächeninhalte 1; es ist ein Elementarcoordinatensystem. Ausserdem besitzt es die für das folgende wesentliche Eigenschaft, dass seine Ecken durch die w- Linien der indefiniten Form getrennt werden. Da nämlich der x- Vector auf dem einen, der y- Vector auf dem anderen Umriss polygon der w- Linien endigt, so liegt die eine Fundamentallinie (sagen wir w) im ersten, die andere (w_2) im zweiten Quadranten des x, y- Systems. Sind die Gleichungen der beiden Geraden in unserem Coordinatensystem

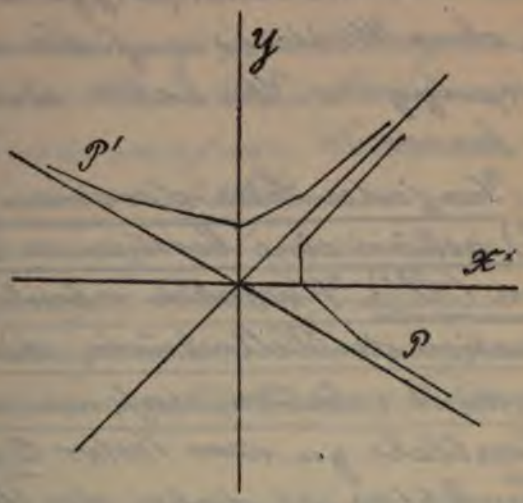
$$\frac{x}{y} = \lambda_1 \text{ und } \frac{x}{y} = \lambda_2$$

so haben in Folge dessen λ_1 und λ_2 verschiedene Vorzeichen. Jedes Coordinatensystem, für welches dieses zutrifft, nennen wir ein reducirtes Coor-

gleichen Vorzeichen der N
mittelbar, dass die Coeff
ihrerseits ein gleiches Vo
Umgekehrt hat auch je
in welcher S und C
zeichen haben, zwei Nu
gesetztem Zeichen. Wir k
Definition der reducirte
folgendermassen fasse
Form ist eine solche, fü

Die Beziehung zwische
Umrisspolygonen und
der zu den Fundamen
gen Kettenbruchentwic
tet sich in einem re
notensystem besonc

in dependenten geometrischen Construction jener Polygonzüge notwendiger Weise Teile unserer natürlichen Umrisspolygone P und P' sind. Es sind nämlich die im ersten Quadranten des x, y-Systems gelegenen Stücke von P und P'.



Entwickeln wir ferner Λ_2 in einen Kettenbruch, so sind zugehörigen Polygonzüge dieses Kettenbruchs die übrig bleibenden Teile der natürlichen Umrisspolygone, nämlich die im 2ten und 4ten Quadranten gelegenen Stücke von P und P'. <u>In einem reducirten Coordinatensystem setzen sich also die natürlichen Umrisspolygone aus den Kettenbruchpolygonen der Wurzeln Λ_1 und Λ_2 direct zusammen.</u> Bei

risspolygone. Wir haben
te hervor:
1. Zu jeder Seite des ei
(P) gehört eine bestimm
ren (P'). Wir haben na
struction der Kettenbrüche
dadurch erhalten, daß n
Parallele zu dem Vekto
Punkt (r) ist daher d
eindeutig zugeordnet
als den jener Seite „g
Eckpunkt.
2. Die Seite (r-1)-(r+1) be
gerade die Länge des
sitzen. Sie konnte auc
(a-faches) Multiplum

Anzahl der Nebenpunkte im Innern der Seite war. Dementsprechend gehört auch zu jeder Seite unserer natürlichen Umrisspolygone eine ganze Zahl α. Wir versehen diese Zahlen in der Weise mit Indices, dass sich die Zahlen α_r mit ungeradem Index auf die Seiten von P die mit geradem Index auf die Seiten von P' beziehen. Dadurch bekommen wir zwei Reihen beiderseitig in's Unendliche verlaufender ganzer Zahlen, welche so wie die Reihen der geraden und ungeraden Zahlen in ihrer natürlichen Folge geordnet sind:

$$\cdots (\alpha_{-3} ; (\alpha_{-1} , (\alpha_1 , (\alpha_3 , \cdots$$
$$\cdots , (\alpha_{-2} , (\alpha_0 , (\alpha_2 , (\alpha_4 , \cdots$$

3. Wir können diese Zahlenreihen an sich ganz beliebig annehmen und dadurch die Lage der Geraden willkürlich A_1 und A_2 festlegen. In der That setzen sich aus jeder solchen Zahlenreihe zwei Kettenbrüche zusammen, durch welche immer ein und nur ein Wertepaar A_1 A_2 bestimmt wird.

1. Von einer vorgelegte
Form

$$f = ax^2 + bxy +$$

gelangen wir zu einer

$$F = AX^2 + BXY +$$

durch Einführung eines
dinatensystems, in dem
vector OX nach einem Gi
beliebigen Polygonecke
heitsvector OY nach dem
genden Eckpunkte von
2. Diese Einführung ist
schiedene Arten möglich.
zu einer indefiniten Form
ze Serie reducirter Form

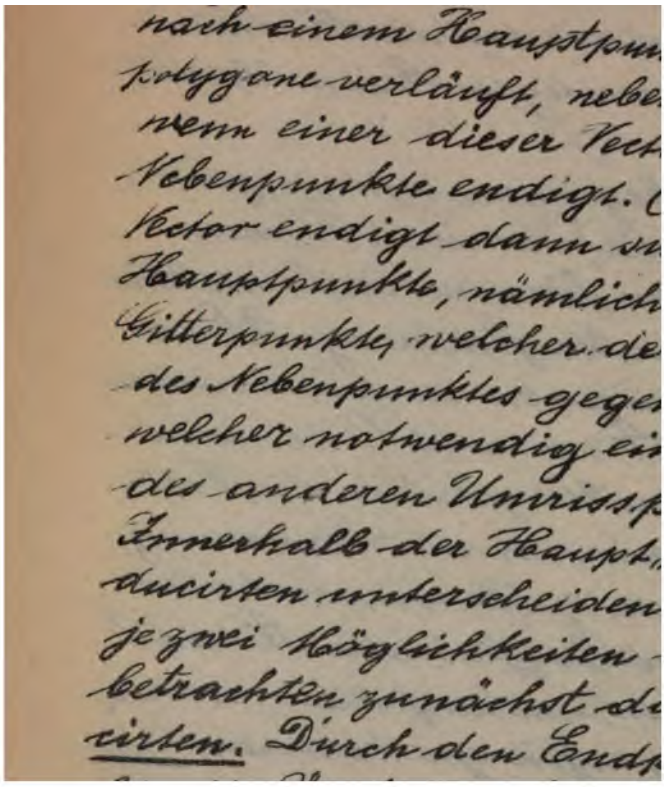
längs der Seiten der Umrisspolygone entlang schieben.

3. Die Bedingung für die „Aequivalenz" zweier gegebener indefiniter Formen besteht dann einfach darin, dass die Serien der reducirten Formen oder auch nur irgend ein Paar reducirter Formen aus den beiderseitigen Serien übereinstimmen muss.

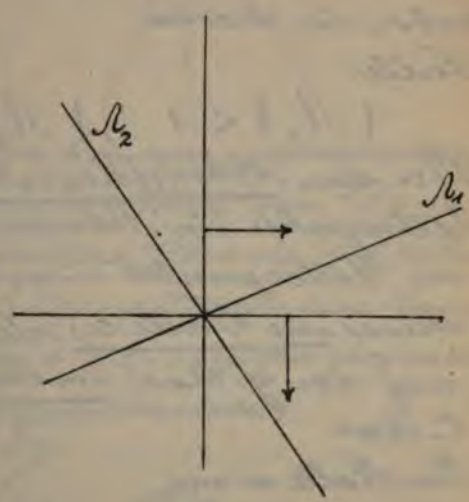
ci. d. 6. XII. Wir beginnen mit einigen Détails über die reducirten Formen.

Als Kennzeichen für eine reducirte Form fanden wir die Ungleichung: $AC < 0$.

Wir können es dabei noch so einrichten, dass speciell $A > 0$ und $C < 0$ wird. Ist nämlich das Umgekehrte der Fall, so brauchen wir nur die Benennung des x- und des y-Vectors, und also auch die der Coefficienten A und C zu vertauschen, um auf die vorstehenden Ungleichungen zu kommen. Nach dieser Verabredung werden also die reducirten Formen stets in denjenigen durch die R_1- und R_2-Linie begrenzten Doppelvector positiv sein,


nach einem Hauptpun
polygone verläuft, nebe
nem einer dieser Vect
Nebenpunkte endigt.
Vector endigt dann
Hauptpunkte, nämlich
Gitterpunkte, welcher de
des Nebenpunktes gege
welcher notwendig ei
des anderen Umriss
Innerhalb der Haupt
ducirten unterscheiden
je zwei Möglichkeiten
betrachten zunächst d
cirten. Durch den End

gonseite durch den Einheitspunkt auf der y-Axe nach dem ersten Quadranten hin verlaufen. Dann zieht die der y-Axe parallele Polygonseite im Einheitspunkte der x-Axe in den 4ten Quadranten hinein. Wir zeichnen unser Coordinatensystem der Einfachheit halber als gewöhnliches rechtwinkeliges Coordinatensystem. Die Linie $\mathfrak{L}_1$ liegt dann notwendiger Weise zwischen der x-Axe und der Winkelhalbirenden des ersten Quadranten, die Linie $\mathfrak{L}_2$ zwischen der y-Axe und der Winkelhalbirenden des zweiten Quadranten. In diesem Falle ist



$$|\mathfrak{L}_1| > 1, \quad |\mathfrak{L}_2| < 1.$$

Im Falle b.) der Hauptreducirten möge die Polygonseite durch den Endpunkt

Dementsprechend
ändert sich die
Lage der Linien
Λ_1 und Λ_2. Wir
haben in diesem
Falle:

$$|\Lambda_1| < 1 \quad , |\Lambda_2|$$

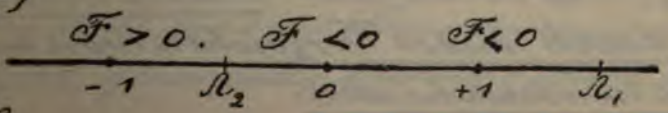
Bei den Nebenreducirten
heitspunkte ein Nebenpun
rer Gitterpunkt einer $\mathfrak{T}_2$
dieses im Falle a) der
auf der y-Axe, im Fall
X-Axe.
Im Falle a ver
laufen die Λ-

den Winkelhalbirenden. In diesem Falle ist also

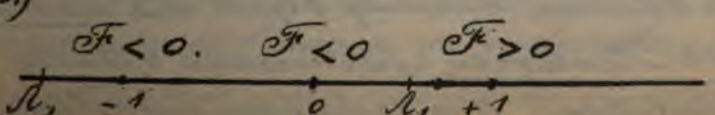
$$|\lambda_1| > 1, \quad |\lambda_2| > 1$$

Im Falle b) liegen die λ-Linien zwischen der y-Asce und den beiden Winkelhalbirenden. Es wird daher $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$. Um die Wurzelverteilung in den verschiedenen Fällen noch besser übersehen zu können, repräsentiren wir uns die möglichen Werte von x/y je durch eine besondere Gerade. Wir haben auf dieser die folgende relative Lage der Werte $\lambda_1, \lambda_2, +1, 0, -1$ gegen einander: im Falle der Hauptreducirten

a)



b)



-1 R_2 0

Wir tragen ferner in u

Vorzeichen von F in

und -1 ein. Da nach

längs der x-Axe posit

der y-Axe negativ. D

kommt daher in allen

gative Vorzeichen zu. D

gilt auch nach beiden

bis an die Stellen R_1, R

jenseits derselben in da

Danach ist es klar, welc

Form an den Stellen +

finden. Wir erkennen:

sind durch diese Vorz

dem wir $x = 1, y = 1$, bez. $x = -1, y = 1$ in F
setzen, die folgenden Ungleichungen:

Im Falle der Hauptreducirten

1)
$$\left| \begin{array}{l} A + B + C < 0, \\ A - B + C > 0, \end{array} \right.$$

2)
$$\left| \begin{array}{l} A + B + C > 0, \\ A - B + C < 0. \end{array} \right.$$

Im Falle der Nebenreducirten

1)
$$A \pm B + C < 0$$

2)
$$A \pm B + C > 0.$$

Dazu kommen noch als allgemeingültige Bedingungen für reducirte Formen die folgenden:

$$A > 0 \text{ und } C < 0.$$

In den arithmetischen Darstellungen unserer Theorie, wo diese Einteilung, wenigstens was die Hauptreducirten anbelangt, gleichfalls gemacht wird, erscheint sie als etwas sehr Willkürliches, während sie sich vom geometrischen Standpunkte aus auf dem hier eingeschla-

genen Wege ganz von selbst darbietet. Man möchte fast vermuten, dass Gauss selbst bei der Entdeckung dieser Dinge von geometrischen Anhaltspunkten gelei- tet worden ist und dass er diese, seiner bekannten (aber nicht nachahmenswer- ten) Publicationsmethode zufolge, spä- terhin absichtlich unterdrückt hat.

Wir untersuchen nun das Gesetz, nach welchem man aus einer reducirten Form die zugehörige unbegrenzte Reihe der übrigen reducirten Formen ableiten kann. Wir nehmen an, es sei eine Hauptreducir- te des Falles a) vorgelegt:

$$F = A_1 X_1^2 + B_1 X_1 Y_1 + C_1 Y_1^2$$

und wir sollen mit unserer Reihe an R_1 entlang schreiten. Liegt der Fall b) vor, so ist einfach X und Y zu vertauschen; sollen wir an R_2 entlang schreiten, so haben wir die ganze Reihe der Opera- tionen umzukehren. Unser ursprüng- liches reducirtes Coordinatensystem X_1, Y_1 ändern wir nun in gesetzmäs- siger Weise so ab, dass es beständig ein reducirtes Coordinatensystem bleibt.

Wir beginnen damit, den y-Vector oder x_2-Axe parallel um eine Einheit zu verschieben. Kein Endpunkt wandert dabei auf P' vergl. die erste Figur auf pag 117. Analytisch bedeutet dieses, dass wir die Substitution

$$x_1 = x_1' + y_1'$$
$$y_1 = y_1'$$

ausüben, die wir früher als Substitution S bezeichneten. Unsere Form geht dabei über in

$$A_1 x_1^2 + (2A_1 + B) x_1' y_1' + (A_1 + B_1 + C_1) y_1'^2,$$

welche neue Form nach den geometrischen oder auch nach den arithmetischen Kriterien des Falles a) sicher gleichfalls eine reducirte ist. Es kann aber sein, dass wir diese Verschiebung noch ein zweites Mal ausführen können, ohne dass unsere Form aufhörte, eine reducirte zu sein, dann vielleicht ein drittes Mal, etc. etc. Sei die grösste Anzahl von Malen, dass dieses möglich ist, μ_1. Dann ist die durch die Substitution S^{μ_1} aus F abgeleitete Form

$$(A_1, 2A_1\mu_1 + B_1, A_1\mu_1^2 + B_1\mu_1 + C_1)$$

des y-Vectors die A_1, -
Die Zahl α_1 können wir
tisch so definiren: Es is
ze Zahl, für welche die U
$$A_1 \alpha_1^2 + B_1 \alpha_1 + C_1$$
Setzen wir nun
$$A_1 = A_2, \quad 2A_1\alpha_1 + B_1 = B_2, \quad A_1$$
so ist
$$(A_2, B_2, C_2)$$
wiederum eine Hauptfo
aber eine 6). Denn es is
$$\begin{cases} A_2 + B_2 + C_2 > 0 \\ A_2 - B_2 + C_2 < 0 \end{cases}$$
Wir sagen, dass
$$A_2, B_2, C_2,$$

mit dieser Form (A_2, B_2', C_2), indem wir nun die Rollen von x' und y vertauschen. Wir verschieben den x'-Vector ihres Coordinatensystems (x_2', y_2) parallel der y_2-Axe um so viele Einheiten, als möglich, d. h. solange als die Form dabei reducirt bleibt, Analytisch bedeutet dieses, dass wir die Substitution S':

$$\left.\begin{aligned} x_2' &= x_2' \\ y_2 &= x_2' + y_2' \end{aligned}\right\} S'$$

eine Anzahl von Malen (μ_2-mal) ausführen, wobei μ_2 diejenige grösste ganze Zahl ist, für welche

$$A_2 + B_2' \mu_2 + C_2 \mu_2^2$$

noch positiv ist. Die Substitution S'^{μ_2} lässt dann aus $(A_2, B_2' C_2)$ wiederum eine Hauptreducirte a) entstehen, welche wir mit (A_3, B_3', C_3) bezeichnen. An der neuen Hauptreducirten operiren wir in derselben Weise mit der Substitution S und bekommen so fortfahrend eine unbegrenzte Reihe von hauptreducirten Formen. Es ist ferner klar, dass wir diese Operationen von

noch eine reducirte Form, ihr letzter Coefficient $A_1 \mu_1^2 + B_1' \mu_1 + C_1$ also noch negativ. Durch abermalige Ausübung der Substitution S dagegen wird eine Form entstehen, deren letzter Coefficient positiv ist. Denn wir würden bei nochmaliger Verschiebung des y-Vectors die A_1-Linie überschreiten. Die Zahl μ_1 können wir daher arithmetisch so definiren: Es ist die grösste ganze Zahl, für welche die Ungleichung besteht:

$$A_1 \mu_1^2 + B_1' \mu_1 + C_1 < 0$$

Setzen wir nun

$$A_1 = A_2, \quad 2A_1\mu_1 + B_1' = B_2', \quad A_1\mu_1^2 + B_1'\mu_1 + C_1 = C_2,$$

so ist

$$(A_2, B_2', C_2)$$

wiederum eine haupt-reducirte Form, aber eine 6). Denn es ist jetzt

$$\left.\begin{aligned} A_2 + B_2' + C_2 &> 0 \\ A_2 - B_2' + C_2 &< 0 \end{aligned}\right\}$$

Wir sagen, dass

$$A_2, B_2', C_2$$

auf die Haupt-reducirte (A_1, B_1', C_1) bei der gewählten Fortschreitungsrichtung längs P' zuerst folgt.

Nun operiren wir in ähnlicher Weise

mit dieser Form (A_2, B_2', C_2), indem wir nun die Rollen von x' und y vertauschen. Wir verschieben den x'-Vector ihres Coordinatensystems (x_2', y_2) parallel der y_2-Axe um so viele Einheiten, als möglich, d. h. solange als die Form dabei reducirt bleibt. Analytisch bedeutet dieses, dass wir die Substitution S':

$$\left.\begin{aligned} x_2' &= x_2' \\ y_2 &= x_2' + y_2' \end{aligned}\right\} S'$$

eine Anzahl von Malen (μ_2-mal) ausführen, wobei μ_2 diejenige grösste ganze Zahl ist, für welche

$$A_2 + B_2' \mu_2 + C_2 \mu_2^2$$

noch positiv ist. Die Substitution S'^{μ_2} lässt dann aus $(A_2, B_2' C_2)$ wiederum eine Hauptreducirte a_3 entstehen, welche wir mit (A_3, B_3', C_3) bezeichnen. An der neuen Hauptreducirten operiren wir in derselben Weise mit der Substitution S und bekommen so fortfahrend eine unbegrenzte Reihe von hauptreducirten Formen. Es ist ferner klar, dass wir diese Operationen von

endlichen Schaar von For
erledigt; es handelt sich
sehen, um eine ganz ele
vorschrift.

Wir haben noch als E
Vorstehenden anzugeben, n
ner beliebigen Form f z
ducirten Form F gelang
wollen uns den Weg kur
klar machen. Wir
betrachten dazu
den Wurzelnw, u.
w_2 von $f = 0$ gehöri-
gen Kettenbruch-
entwickelungen.

natürlichen Umrisspolygonen decken. Wenn wir also dasjenige Coordinatensystem, auf welches f ursprünglich bezogen ist, und welches wir als nicht reducirt voraussetzen wollen, längs der Umrisspolygone der Entwickelungen von ω, (oder auch von ω_2) in der durch den Kettenbruch in dieirten Weise entlang schieben, so bringen wir es durch eine endliche Anzahl solcher Verschiebungen schließlich in eine Lage, wo seine Einheitsvectoren in Eckpunkten von T und T' endigen, wo also das Coordinatensystem ein reducirtes geworden ist. Gleichzeitig ist dann auch eine reducirte Form F entstanden. Der Unterschied gegen vorhin ist dabei dieser!

Während wir von einer reducirten Form F zu neuen reducirten mittelst rationaler Kriterien fortschreiten konnten, mussten wir, wie wir gerade schilderten, zur Aufstellung einer ersten F die irrationalen Grössen ω_1, ω_2 selbst bez. ihre Kettenbrüche zu Hülfe nehmen. Es handelt sich eben zunächst noch darum, was bei einer reducirten F

Form eine ganzzahlig
nehmen an, dass die C
Form commensurabel
den dementsprechend
$f = M(ax^2 + bxy$
wo a, b, c ganze Zahle
digen Factor bedeutet.
ten a, b, c nehmen wir
sie teilerfremd sind, d.
einen gemeinsamen Fa
diesem Falle nennen
eine primitive Form.

Das Resultat der let
sichtlich der reducirten
te folgendermassen:

$F_2 = (a_2 , b_2 , c_2)$

$F_3 = (a_3 , b_3 , c_3)$

Ist F_1 eine Haupтreducirte des Falles a), so sind es auch $F_3, F_5, \ldots$, während $F_2, F_4, \ldots$ Haupтreducirte des Falles b) sind. Diese Formen hängen wie die Glieder einer Kette untereinander zusammen; es wird nämlich $a_1 = a_2$, $c_2 = c_3$, $a_3 = a_4$ etc.

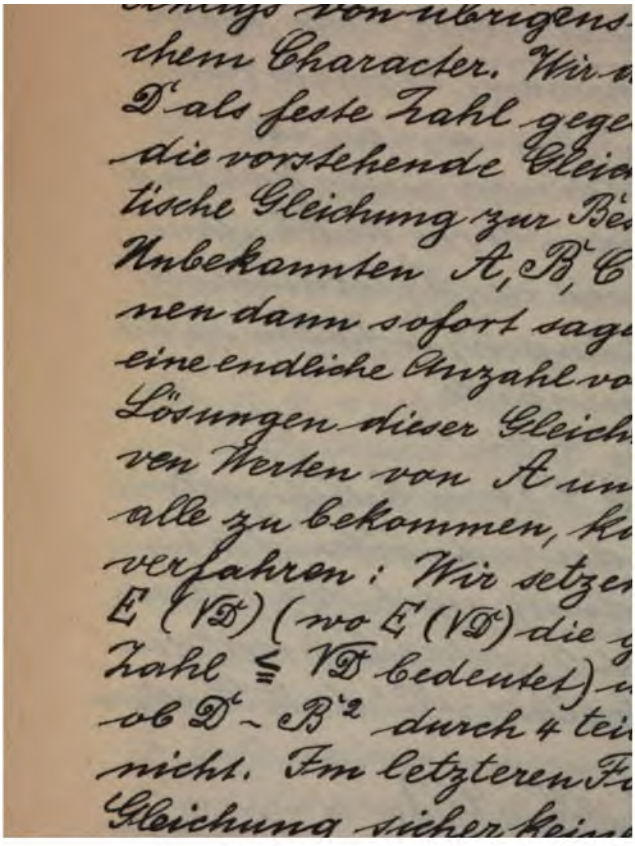
Da alle diese Formen unter sich und mit der gegebenen Form durch affine Substitutionen von der Determinante 1 zusammenhängen, so haben sie die gleiche Discriminante

$$D = b^2 - 4ac.$$

Sei $F = (A, B, C)$ eine beliebige Form aus der Reihe der reducirten. Da unserer Verabredung nach bei reducirten Formen $C < 0$, schreiben wir der Deutlichkeit halber $-C'$ statt C, setzen also

$$F = (A, B, -C').$$

wo jetzt C' und ebenso A positive Zahlen sind. Die Discriminante von F hat dann folgende Gestalt:



So erhalten wir alle möglichen Werte von A, C' und B.

Das Resultat dieser Betrachtung ist der folgende wichtige Satz: Zu einer gegebenen Discriminante gehört nur eine endliche Anzahl reducirter Formen (A, B, C).

Nun hatten wir gelernt aus einer Form eine unendliche Serie reducirter Formen

$$\ldots F_{-1}, F_0, F_1, F_2, \ldots$$

zu erzeugen. Da überhaupt nur eine endliche Anzahl von solchen Formen zur Verfügung steht, muss eine Form in dieser Serie mehrmals vorkommen. Sei F_1 diese Form; dann gibt es eine erste Form F_{r+1}, welche dieselben Coefficienten, A, B, C hat, wie F_1. Nun entstand aus F_1 durch einen gewissen Process die ganze Reihe der Formen F. Sind wir bei diesem Process bis F_{r+1} gekommen, so haben wir, um zu F_{r+2} etc. zu kommen, mit F_{r+1} dieselben Operationen vorzunehmen, wie mit F_1. Wir werden daher ein zweitesmal dieselben Formen erhalten: $F_{r+2} = F_2$, $F_{r+3} = F_3$, $\ldots F_{2r+1} = F_{r+1} = F_1$ etc. Wir können auch von F_1 nach rück-

Satz knüpfen, bezieht sich
venzproblem. Wir sagte
und f' sind äquivalen
härigen Reihen der redu
$F_{-1}, F_0, F_1 \ldots F'_{-1}, F'_0, F$
men. Um dieses zu ents
wir aus der einen Reihe
herausgreifen und zus
der anderen Reihe eine
findet. Darin liegt aber
gewisse Schwierigkeit.
eine Reihe von Formen
die Form F, darunter
haben, so können wir dar
schliessen, dass f und

Satz von der Periodicität der Formenreihe wird diese Schwierigkeit gehoben. Wir haben jetzt nämlich F_i, um mit der endlichen Anzahl r von Formen F' zu vergleichen. Wir können also jetzt (d. h. im Falle der Formen mit ganzzahligen oder doch commensurablen Coefficienten) die Aequivalenzfrage durch eine von vornherein angebbare endliche Anzahl von Schritten entscheiden.

Eine ganze Reihe anderer interessanter Folgerungen ergibt sich, wenn wir die Substitution aufsuchen, welche F_i in F_{i+1}, d. h. in sich selbst überführt.

Zu jeder Form F gehörte ja ein reducirtes Coordinatensystem. Dabei entstand die Elementarfigur eines jeden aus der in der Reihe vorhergehenden Elementarfigur durch eine affine Transformation von der Determinante 1 (nämlich

$$\Sigma \left| \begin{array}{l} x_1 = \alpha x_{r+1} + \beta y_r \\ y_1 = \gamma x_{r+1} + \delta y_{r+} \end{array} \right.$$

Diese Substitution führ
über; wir bezeichnen sie
morphie der Form.

Alle Substitutionen, zu w
Übergang von einer Elemen
Reihe zu einer andern kom
Eigenschaft, nicht nur d
1 zu besitzen, sondern
Axe in denselben Sector
Linien Λ_1 und Λ_2 zu
wollen eine Substitution
Eigenschaft vorüberge

$$x_1 = -x_2, \quad y_1 = -y_2, \quad \text{oder auch} \quad x_1 = -y_2, \quad y_1 = +x_1$$

Wir bezeichnen daher genauer unsere Automorphie als eine <u>reguläre Automorphie</u>.

Gehen wir sodann von F_{r+1} zu F_{2r+1} weiter, so geschieht dieses gleichfalls durch eine affine Transformation von der Determinante 1. Es zeigt sich sofort, dass diese mit Σ identisch sein muss. Denn der Übergang von dem Coordinatensystem $(r+1)$ zu $(2r+1)$ setzt sich durch genau dieselbe Combination der Operationen S und S' zusammen, wie der Übergang von (1) zu $(r+1)$.

Wollen wir zu neuen regulären Automorphien kommen, so können wir also nichts anderes machen, als dass wir die Operation Σ wiederholen, d.h. von F_1 direct zu F_{2r+1}, F_{3r+1} etc. übergehen. Wir bilden uns also die Reihe der folgenden Substitutionen:

$$\ldots \Sigma^{-2}, \Sigma^{-1}, \Sigma^{0}, \Sigma, \Sigma^{2}, \ldots$$

Wir erhalten so eine unendliche Reihe

$$\Sigma \left| \begin{array}{l} x_1 = \alpha x_{r+1} + \beta y_{r+1} \\ y_1 = \gamma x_{r+1} + \delta y_{r+1} \end{array} \right.$$

Diese Substitution führt
über; wir bezeichnen sie a
morphie der Form.

Alle Substitutionen, zu we
Übergang von einer Elemen
Reihe zu einer andern kom
Eigenschaft, nicht nur de
1 zu besitzen, sondern a
Axe in demselben Sector
Linien Λ_1 und Λ_2 zu b
wollen eine Substitution
Eigenschaft vorüberge
guläre nennen. Ein P

$X_1' = -X_2$, $\quad Y_1' = -Y_2$, oder auch $X_1' = -Y_2$, $\quad Y_1' = +X_1$

Wir bezeichnen daher genauer unsere Automorphie als eine reguläre Automorphie.

Gehen wir sodann von $\mathfrak{F}_{r+1}$ zu $\mathfrak{F}_{2r+1}$ weiter, so geschieht dieses gleichfalls durch eine affine Transformation von der Determinante 1. Es zeigt sich sofort, dass diese mit Σ identisch sein muss. Denn der Übergang von dem Coordinatensystem $(r+1)$ zu $(2r+1)$ setzt sich durch genau dieselbe Combination der Operationen S und S' zusammen, wie der Übergang von (1) zu $(r+1)$.

Wollen wir zu neuen regulären Automorphien kommen, so können wir also nichts anderes machen, als dass wir die Operation Σ wiederholen, d.h. von $\mathfrak{F}_1$ direct zu $\mathfrak{F}_{2r+1}$, $\mathfrak{F}_{3r+1}$ etc. übergehen. Wir bilden uns also die Reihe der folgenden Substitutionen:

$$\ldots \Sigma^{-2}, \Sigma^{-1}, \Sigma^{0}, \Sigma, \Sigma^{2}, \ldots$$

Wir erhalten so eine unendliche Reihe

nelle Lagen gebracht
gibt es auch keine an
ren Automorphien v
hingeschriebenen, De
solche Substitution d
ducirten Formen in
ren, sie muss also e
Coordinatentransfor
welche die Elementar
der anderen reducirt
figuren verwandelt
enthält aber alle die
natentransformation
bei welchen F, in sich

Die Operation Σ mit
und negativen Potenzen

Man kann diesen Dingen noch eine interessantere Wendung geben, wenn man berücksichtigt, daß jede Substitution neuer Veränderlicher in der analytischen Geometrie auf doppelte Weise aufgefasst werden kann: entweder als Coordinatentransformation bei festgehaltener Figur, oder als Figurentransformation bei festgehaltenem Coordinatensystem. Bisher haben wir unsere Automorphie vom Standpunkte der Coordinatentransformation betrachtet. Denken wir uns jetzt das Coordinatensystem fest. Dann stellt die Substitution Σ eine affine Umformung der Ebene dar. Da ihre Coefficienten ganze Zahlen sind, so gehen dabei die Gitterpunkte wieder in Gitterpunkte über. Da ferner F_1 in sich übergeführt wird und da $F_1 = 0$ die Gleichung der Λ-Linien ist, so bleiben die Λ-Linien bei jener Umformung ungeändert. Da endlich Σ eine reguläre Substitution ist, so ver-

den auch die zwischen den Λ-Linien gelegenen Sectoren in sich übergeführt. Wir nannten aber eine solche affine Umformung, bei welcher die Λ-Linien fest bleiben und die Λ-Sectoren in sich verwandelt werden, eine Pseudodrehung. Bei unserer zweiten Auffassung ist also die Operation Σ eine Pseudodrehung um O, welche das Punktgitter als Ganzes ungeändert lässt. Auf Grund des Früheren können wir sagen: es gibt unendlich viele solcher Pseudodrehungen, dieselben werden durch die positiven und negativen Potenzen von Σ erschöpft.

Gleichzeitig mit den Λ-Linien und den Punktgittern werden auch die Umrisspolygone der letzteren durch unsere Pseudodrehungen mit sich zur Deckung gebracht. Dieselben besitzen also eine Regelmässigkeit, ähnlich der der regulären Polygone in der Elementargeometrie. Während aber bei diesen jede Seite mit jeder anderen durch eine gewisse Drehung

und deren Wiederholungen zur Deckung gebracht wird, wird bei unseren Polygonen immer erst ein gewisser Complex von Seiten in einen anderen solchen Complex übergeführt. Die nebenstehende Figur stellt dasentsprechende Vorkommnis in der gewöhnlichen Maassbestimmung dar. Wir wollen ein solches Polygon als semiregulär bezeichnen. Von unseren Umrisspolygonen werden wir daher sagen können: sie sind pseudosemiregulär.

Hier entsteht vor Allem die Frage nach der (hyperbolisch gemessenen) Grösse des zur Substitution Σ gehörigen Drehungswinkels. Diese Frage werden wir unter anderen beantworten, indem wir im Folgenden als analytische Ergänzung zu dem Vorhergehenden die Theorie der

welche f in sich überfü
rung wird ganz einfa
Folgendes berücksichtig
schriebene Substitution
punkt und zwei Strahl
selben ungeändert. Die
der letzteren ergibt
$x' = \varrho x$, $y' = \varrho y$ setzen;

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y} \quad \text{oder} \quad \gamma x^2$$

Soll die Form f bei unser
in sich übergehen, so mü
Strahlen mit den Λ-Li

$\gamma = au$, $\delta - \alpha = bu$, $\beta = -cu$,
unter u eine ganze Zahl verstanden. Setzen wir noch $\delta + \alpha = t$, so berechnet sich:

$$\alpha = \frac{t - bu}{2}, \quad \beta = -cu$$

$$\gamma = au, \quad \delta = \frac{t + bu}{2}.$$

Die Zahlen t und u sind nun nicht willkürlich; aus der Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ folgt nämlich:

$$t^2 - Du^2 = 4.$$

Dies ist die berühmte <u>Pell'sche Gleichung.</u>

Jede ganzzahlige Lösung dieser Gleichung liefert uns eine Automorphie von f.

ei. d. 13. XII. Wir erhalten übrigens durch die Pell'sche Gleichung ausser den regulären Automorphien auch diejenigen, bei denen die Δ-Sectoren vertauscht werden. Eine Lösung ist nämlich auch:

$$t = \pm 2, \quad u = 0;$$

zu dieser gehört die Substitution

gulären Substitution
selbst.

Besonders einfach
Transformationsgle
malcoordinaten. W
zwei Factoren

$$f = \xi\,\eta$$

$$\xi = m\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}\right.$$

$$\eta = \frac{1}{m}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2}\right.$$

wobei die Hinzufügun
$m, \frac{1}{m}$ nur eine Ver
muthes bedeutet, unt
unser Gitter gegen d
system „orientiren"

Automorphie von f übergeführt wird, so daß

$$\xi' = m\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\,y'\right)$$

$$\eta' = \frac{1}{m}\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b-\sqrt{D}}{2}\,y'\right).$$

Tragen wir in die Ausdrücke für ξ und η die Werte von x und y aus den Substitutionsformeln der vorletzten Seite ein, so ergibt sich einfach:

$$\xi = \frac{t+\sqrt{D}\,u}{2}\,\xi',$$

$$\eta = \frac{t-\sqrt{D}\,u}{2}\,\eta'.$$

Die Minimalcoordinaten ξ, ξ' und η, η' zweier durch die Automorphie zugeordneter Gitterpunkte sind also untereinander proportional. Es ist dieses selbstverständlich, weil ja die Minimallinien $\xi = 0$, $\eta = 0$ bei der Automorphie nicht geändert werden.

Wir geben der Pell'schen Substitution noch eine etwas andere Form, indem wir statt $f = 0$ schreiben: $a w^2 + bw + c = a(w - w_1)(w - w_2) = 0$. Dann wird $\xi = n(w - w_2)$,

Die Pell'sche Substitu
folgendermassen ges
$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{t + u\sqrt{D}}{t - u\sqrt{D}}.$$
oder mit Rücksicht a
Gleichung:
$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \left(\frac{t + u\sqrt{D}}{2}\right.$$
Die Proportionalität
da $\xi\eta = \xi'\eta'$ ist, der
gen, dass ihr Produ
Hierdurch charakte
Automorphie als Ps
der That haben wir
Gleichung zwischen

nalitätsfactoren von dem Vorzeichen von t ab. Nehmen wir t als positive Zahl, so sind auch jene Factoren positiv, die Automorphie also eine reguläre.

Die Grösse des Drehungswinkels berechnet sich nach pg 75 aus den vorstehenden Substitutionsformeln zu

$$\frac{i}{2} lg \frac{t + u\sqrt{D}}{t - u\sqrt{D}} = \frac{i}{2} lg \frac{(t + u\sqrt{D})^2}{4} = i\, lg\left(\frac{t+u\sqrt{D}}{2}\right).$$

Wir combiniren jetzt diese Entwickelungen mit den früheren geometrischen Betrachtungen. Da folgt zunächst, dass die Pell'sche Gleichung sicher Lösungen hat, welche von der trivialen $t = \pm 2,\ u = 0$ verschieden sind. Ferner aber sagen wir:

Da irgend zwei Automorphien nacheinander ausgeführt wieder zu einer Automorphie führen, so werden sich irgend zwei Lösungen t, u und t', u' der Pell'schen Gleichung wiederum zu einer Lösung dieser Gleichung zusammensetzen müssen. In der That, sei

$$\{ = \frac{t + u\sqrt{D}}{2} \}'$$

$T = \frac{tt' + uu'D}{2}$, $U =$

Um einzusehen, dass die
ganze Zahlen sind, mis
lich der Discriminante

$D = b^2 - 4a$

zwei Fälle untersche
b gerade oder ungerade,

entweder $D \equiv 0 \ (4)$

oder $D \equiv 1 \ (4)$

aus der Pell'schen Glei
ersten Falle, dass t und
zweiten Falle, dass t u
so t' und u') gleichz
ungerade sind. Allen
her T und U ganze

bei der Pell'schen Gleichung auch ganz von dem Zusammenhange mit den Automorphien absehen und die Grössen

$$\frac{t + u\sqrt{D}}{2} \quad \text{bez.} \quad \frac{t - u\sqrt{D}}{2}$$

als complexe Zahlen auffassen, wobei wir t und u durch die Relation verbunden denken: $t^2 - Du^2 = 4$. Das System dieser complexen Zahlen hat nach dem, was wir soeben sahen, die Eigenschaft, sich bei der Multiplication zu reproduciren, in dem Sinne, dass das Product zweier Zahlen $\frac{t + u\sqrt{D}}{2}$ und $\frac{t' + u'\sqrt{D}}{2}$ wieder eine Zahl $\frac{T + U\sqrt{D}}{2}$ des Systems wird.

Über diese Zahlen können wir ferner auf Grund unserer früheren Betrachtungen den folgenden merkwürdigen Satz aussprechen. Alle Zahlen dieses Systems ergeben sich aus einer einzelnen kleinsten Lösung t_0, u_0 der Pell'schen Gleichung, indem man $\frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}$ potenzirt.

Es entspricht nämlich jede Zahl $\frac{T + U\sqrt{D}}{2}$ einer unserer Automorphien. Nun konnten wir alle Automorphien mit

phie also die Potenzirung
Ist daher $\frac{t_0 + u_0 \sqrt{D}}{2}$ ...
des Systems, welche zu Σ ...
hört zu $\Sigma^{(u)}$ die Zahl

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_0 + \ldots}{2}\right.$$

Der zur Substitution Σ ge...
winkel, nach welchem wi...
berechnet sich aus der ...
der Pell'schen Gleichung ...
Weise

$$\varphi_0 = i \lg \frac{t_0 + n_0 \sqrt{D}}{2}$$

Wir nennen φ den Pe...
Wir erweitern jetzt diese ...
noch nach anderer Se...

aequivalent sind, bilden eine „Klasse" von Formen, und in den reducirten Formen haben wir „Repräsentanten" der einzelnen Klasse. Nun ist es sehr wohl möglich, dass die zu derselben Discriminante gehörigen reducirten Formen sich auf verschiedene Klassen verteilen. Da es aber nur eine endliche Anzahl reducirter Formen giebt, so kann man aus ihnen sicher nur eine endliche Anzahl zusammengehöriger aequivalenter Formenserien herstellen. Es giebt daher bei gegebenem D nur eine endliche Anzahl unterschiedener Klassen.

Diese verschiedenen Klassen stehen sich aber nicht fremd gegenüber, sie bilden einen zusammenhängenden Organismus. Es geht dieses schon daraus hervor, dass allen diesen Klassen die Pell'sche Gleichung gemeinsam ist. In der That hängt diese Gleichung ja nur von dem Werte von D, nicht von den Besonderheiten der Klasse ab. Wir

werden das später noch sehr viel weitergehend entwickeln.

Unter diesen Klassen giebt es eine ausgezeichnete, welche man Hauptklasse nennt. Die Hauptklasse muß etwas anders definirt werden, je nachdem der Fall $D' \equiv 0(4)$ oder $D' \equiv 1(4)$ vorliegt. Im ersten Falle ist die Hauptklasse diejenige, welche die Form enthält:

$$X'^2 - \frac{D'}{4} y^2 \qquad \left\{ D' \equiv 0(4) \right\}$$

Im zweiten Falle diejenige, in welcher die Form

$$X'^2 + X'y + \frac{1-D'}{4} y^2 \left\{ D' \equiv 1(4) \right\}$$

vorkommt. Alle anderen Klassen der Discriminante D' werden als Nebenklasse bezeichnet.

Mit den soeben angeschriebenen Hauptformen hängt die Pell'sche Gleichung auf das Engste zusammen. Setzen wir nämlich im ersten Falle $t = 2x$, $u = y$, so lautet dieselbe:

$$X^2 - \frac{D'}{4} y^2 = \underline{1} .$$

Im zweiten Falle setzen wir $t - u = 2x$, $u = y$, dann geht die Pell'sche Gleichung über in

$$X^2 + XY + \frac{1-D}{4} y^2 = 1$$

Beidemale erhalten wir aus der Pell'schen Gleichung die gleich 1 gesetzte Hauptform. Die allgemeine Lösung der Pell'schen Gleichung kommt also darauf hinaus, durch die Hauptform die Zahl 1 in allgemeinster Weise darzustellen.

So haben wir nun ein reiches Material neuer Sätze und neuer Auffassungen und es kommt darauf an, jetzt zunächst dasselbe durch Zahlenbeispiele zu illustrieren. Dabei werden sich von selbst noch einige Bemerkungen ergeben, die auf die allgemeine Theorie Bezug haben.

Ausführliche numerische Tabellen sind von Cayley berechnet worden. (Vergl. Crelle Bd. 60 oder Ges. Werke Bd. 5 pg. 141 ff). Cayley berechnet zu allen Diskriminanten $|D| < 100$ und für einige weitere die zugehörigen Klassen quadratischer Formen.

Ferner sind derartige Tabellen von Legendre mitgeteilt worden (Vergl. Zahlentheorie Bd. I). Wir verweisen insbesondere auf die Tabelle X, welche die Theorie der Pell'schen Gleichung zum Gegenstande hat. Leider finden sich überall Unterschiede in der Bezeichnung, über die man sich vorab unterrichten muss, ehe man die Tabellen gebraucht.

Hier wollen wir $D' = 40$ annehmen. Zunächst berechnen wir die zu dieser Discriminante gehörigen sämmtlichen reducirten Formen. Es handelt sich dabei um die Formen (A, B', C), für welche $AC < 0$ und $B'^2 - 4AC = 40$ ist. Wir stellen die Formen mit positivem A voran; die Formen mit negativem A bekommen wir aus jenen, indem wir die Vorzeichen sämmtlicher Coefficienten umkehren.

Für B' setzen wir nacheinander alle geraden Zahlen $|B'| < \sqrt{40}$ und suchen die zugehörigen Lösungen der Diophantischen Gleichung $B'^2 - 4AC = 40$,

für welche $AC < 0$, $A > 0$ ist. Es ergibt sich

$$B = 0 \begin{cases} 10 , 0 , -1 \\ 5 , 0 , -2 \\ 2 , 0 , -5 \\ 1 , 0 , -10 \end{cases}$$

$$B = \pm 2 \begin{cases} 9 , \pm 2 , -1 \\ 3 , \pm 2 , -3 \\ 1 , \pm 2 , -9 \end{cases}$$

$$B = \pm 4 \begin{cases} 6 , \pm 4 , -1 \\ 3 , \pm 4 , -2 \\ 2 , \pm 4 , -3 \\ 1 , \pm 4 , -6 \end{cases}$$

$$B = \pm 6 \begin{cases} 1 , \pm 6 , -1. \end{cases}$$

Hiernach gibt es 20 reducirte Formen mit positivem A, ebenso viele Formen existiren mit negativem A, so dass die Gesamtzahl der reducirten Formen in diesem Falle 40 beträgt und mit der Discriminante zufälliger Weise übereinstimmt.

Unter diesen Formen suchen wir uns die Hauptreducirten erster und zweiter Art aus, d.h. diejenigen Formen, für welche die Ungleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} A + B' + C &< 0 \\ A + B' + C &> 0 \end{aligned}\right\}$$

bez.

$$\left.\begin{aligned} A + B' + C &> 0 \\ A + B' + C &< 0 \end{aligned}\right\}$$

Es erweisen sich als Hauptreducirte 1. Art die folgenden 4 Formen:

$$3, -2, -3$$
$$3, -4, -2$$
$$2, -4, -3$$
$$1, -6, -1$$

Ebenso gross ist die Anzahl der Hauptreducirten 2 Art. Sie entstehen offenbar aus denen der ersten Art dadurch, dass wir B' im Vorzeichen umkehren. Demnach sind Hauptreducirte der 2ten Art die folgenden 4 Formen:

$$3, +2, -3$$
$$3, +4, -2$$
$$2, +4, -3$$
$$1, +6, -1 .$$

Die übrigen 32 Formen sind Nebenreducirte. In's Besondere gehört die Hauptform $(1, 0, -10)$, sowie alle Formen mit $B = 0$ zu den Nebenreducirten. Von den Nebenreducirten werden wir nur beiläufig sprechen.

Wir stellen nun die zusammengehörigen Serien der hauptreducirten Formen auf, indem wir von irgend einer Hauptreducirten 1ter Art ausgehen. Sei die Ausgangsform

$$F_1 = 3X^2 - 2XY - 3Y^2.$$

Auf diese Form üben wir die Operation

$$S \begin{cases} X = x' + y' \\ Y = y' \end{cases}$$

so oft aus, bis eine Hauptreducirte der 2ten Art entsteht. Es ergibt sich schon beim ersten Male

$$F_2 = 3X^2 + 4XY - 2Y^2.$$

An dieser Form operiren wir mit

$$S' \begin{cases} X = X' \\ Y = X' + Y' \end{cases}.$$

Dabei entsteht zuerst die Nebenreducirte $5X^2 - 2Y^2$; bei nochmaliger Anwendung von S' aber ergibt sich:

$$\mathfrak{F}_3 = 3X^2 - 4XY - 2Y^2.$$

Jetzt wenden wir wieder S an und bekommen die Hauptreducirte

$$\mathfrak{F}_4 = 3X^2 + 2XY - 3Y^2.$$

Hieraus entsteht durch die Operation S'

$$\mathfrak{F}_5 = 2X^2 - 4XY - 3Y^2,$$

sodann durch S^2

$$\mathfrak{F}_6 = 2X^2 + 4XY - 3Y^2.$$

Operiren wir an $\mathfrak{F}_6$ wiederum mit S', so erhalten wir schliesslich

$$\mathfrak{F}_7 = 3X^2 - 2XY - 3Y^2 = \mathfrak{F}_1.$$

In unserm Beispiele treten also 3 Hauptreducirte der 1ten Art (und ebenso viele der 2ten Art) zu einer ersten Formenserie zusammen. Wir wollen uns die Aufeinanderfolge der Formen

schematisch durch Punkte einer geschlossen Curve versinnlichen. Wir erhalten dann in unserem Falle das nebenstehende Bild.

Zu unserer Formenserie gehört eine kleinste Substitution, welche diese Serie in sich transformirt. Diese Substitution können wir, wenn wir von F, ausgehen, nach dem Vorstehenden symbolisch schreiben:

$$(x, y) = SS'^{12} SS' S^2 S' (x', y');$$

ausgerechnet lautet dieselbe

$$x = 26 x^{VI} + 18 y^{VI},$$

$$y = 18 x^{VI} + 13 y^{VI}.$$

Dieser kleinsten Substitution entspricht eine kleinste Lösung der Pell'schen Gleichung:

$$t^2 - 40 u^2 = 4.$$

Dieselbe berechnet sich nach pg. 141 aus den Coefficienten unserer Substitution und der Ausgangsform zu

$$t = 38, \quad u = 6.$$

Alle anderen Lösungen der Pell'schen Gleichung müssen sich aus dieser Lösung durch Potenziren ableiten lassen. Der Pell'sche Winkel wird $i \log (19 + 6\sqrt{10})$.

Von den 8 Haupttreducirten Formen der Discriminante $+40$ bleiben nur 2 Formen übrig, welche nicht in unserer ersten Formenserie enthalten sind. Dieselbe müssen sich zu einer 2ten Serie zusammenschliessen. Wir gehen bei der Berechnung dieser 2ten Serie von der Haupttreducirten erster Art

$$F_1 = x^2 - 6xy - y^2$$

aus. An dieser Form operiren wir mit S^μ, wobei wir $\mu = 1, 2 \ldots$ wählen werden, bis wir wieder auf eine Haupttreducirte kommen. Nehmen wir $\mu = 3$, so entsteht die Haupt-form $x^2 - 10y^2$, welche eine Neben-

reducirte ist. Erst für $\mu = 6$ ergibt sich wieder eine Hauptreducirte u. zw. die noch restirende Form:

$$F_2 = x^2 + 6xy - y^2,$$

wie es sein muss. Üben wir auf diese successive die Operationen $S'^{(\mu}$ aus, so kommen wir für $\mu = 6$ wieder auf F zurück. Unsere zweite Formenserie besteht also nur aus 2 Hauptreducirten; übrigens enthält sie dafür um so mehr Nebenreducirte, nämlich 10. Wollen wir uns auch diese Serie schematisch auf einem geschlossenen Curvenzuge veranschaulichen, so kommen wir zu der nebenstehenden Figur.

Wir haben nunmehr die sämmtlichen 20 reducirten Formen mit positivem A auf 2 Klassen untergebracht. Zu den Formen mit negativem A konnten wir durch unser bisheriges Verfahren

nicht gelangen, weil wir nur die „regulären" Substitutionen S und „S' angewandt haben, welche die A-Sectoren einzeln in sich transformiren. Um zu erkennen, ob sich die Formen mit negativem A in dieselben Klassen einordnen, müssen wir diejenigen Substitutionen von der Determinante 1 hinzunehmen, welche die A-Sectoren vertauschen. Eine einfachste solche Substitutionen ist die uns von früher bekannte Operation:

$$T\begin{cases} x = -y' \\ y = x \end{cases}.$$

Wenden wir diese auf eine reducirte Form $Ax^2+Bxy+Cy^2$ mit negativem A (und folglich mit positivem C) an, so entsteht eine Form $Cx^2-Bxy+Ay^2$ mit positivem ersten Coefficienten. Die Formen mit negativem ersten Coefficienten sind also je mit einer Form aequivalent, deren erster Coefficient positiv ist. Diese Formen ordnen sich also all-

gemein in die Classen der Formen mit positivem A, in unserem Falle somit in die beiden vorher gefundenen Klassen ein. Es gibt bei der Discriminante 40 nur zwei verschiedene Klassen quadratischer Formen.

Bei dieser Gelegenheit bringen wir noch einige Details zur Sprache. Man bezeichnet die Form $(-A, -B, -C)$ als die zu einer gegeben Form (A, B, C) entgegengesetzte Form (forma opposita).

Wir fragen uns, wann eine Form mit ihrer entgegengesetzten aequivalent ist.

Zunächst können wir mittelst der Substitution T die Form $(-A, -B, -C)$ umsetzen in die aequivalente Form $(-C, B, -A)$. Ist (A, B, C) eine reducirte Form mit positivem ersten Coefficienten, so ist auch $(-C, B, -A)$ eine ebensolche. Daraus folgt: Soll eine reducirte Form (A, B, C) mit ihrer entgegengesetzten $(-A, -B, -C)$ aequivalent sein, so muss $(-C, B, -A)$

in derselben Formenserie enthalten sein, wie (A, B, C) selbst.

Bei der Discriminante $D = 40$ ist dieses wirklich der Fall. Wir deuten dieses in den Figuren durch die horizontalen Geraden an, welche je eine Form $(-C, B, a)$ mit einer Form (A, B, C) verbinden. Im Allgemeinen trifft dieses jedoch keineswegs immer zu, wie die Cayley'schen Tabellen zeigen.

Man bezeichnet ferner eine Form, welche mit sich selbst uneigentlich aequivalent ist, d. h. bei einer affinen Transformation von der Determinante -1 ungeändert bleibt, als Anceps-Form (nach Gauss) oder als ambige Form (nach Kummer). Die Formen-Klasse, in welcher eine Anceps-Form enthalten ist, heisst auch eine Anceps-Klasse. Um zu entscheiden, wann eine Klasse ambig ist, transformiren wir eine reducirte Form (A, B, C) der Klasse mittelst der Substitution

$$x = x'$$
$$y = -y',$$

welche von der Determinante -1 ist, in die gleichfalls reducirte Form $(A, -B, C)$. Diese Form muss mit der gegebenen eigentlich-aequivalent sein, wenn die gegebene Form mit sich selbst uneigentlich aequivalent ist. Daraus folgt: Wenn unsere Klasse eine Anceps$_1$ Klasse sein soll, so muss die Form $(A, -B, C)$ in derselben Formenserie vorkommen, wie (A, B, C).

Die Betrachtung der Figuren von pg. 157 und 159 zeigt, dass im Falle D. 40 beide vorhandenen Klassen Anceps$_1$ Klassen sind. Wir deuten dieses durch die Verticalen Geraden an, welche je von einer Form (A, B, C) zu einer Form $(A, -B, C)$ hinführen. Im allgemeinen Falle trifft dieses natürlich nicht zu.

Frei. d. 21. XII. Der Theorie der indefiniten quadratischen Formen haben wir als Ergänzung heute noch einige Bemerkungen über die arithmetischen Kriterien hinzuzufügen, durch welche wir entscheiden können,

ob ein Gitterpunkt zu einem der natürlichen Umrisspolygone gehört. Dazu ist offenbar zunächst erforderlich, daß die Coordinaten des Gitterpunktes x und y keinen gemeinsamen Teiler haben. Als weitere Bedingung teilen wir ohne Beweis die folgende mit: Es wird in den Ecken der Umrisspolygone

$$f(x, y) \leqq D/4.$$

Man kann den Minimalwert von f noch genauer abschätzen. Es zeigt sich nämlich, daß f mindestens in einer Ecke der Umrisspolygone einen Wert

$$\leqq \sqrt{\frac{D}{5}}$$

annimmt. Wegen des Beweises vergleiche man eine interessante Arbeit von Markoff in Math. Annalen Bd. 15 (1879). Es wird interessant sein, die Entwickelungen von Markoff durchweg in das Geometrische zu übersetzen. Übrigens hängen diese Betrachtungen mit unseren früheren Entwickelungen betreffend das Minimum der Linearformen zusammen,

durch welche wir den Lagrange'schen Satz über Kettenbrüche (vergl. pg. 39) bewiesen.

4. Die Reductionstheorie im elliptischen Falle.

Wir hätten jetzt die entsprechende Theorie wie für die indefiniten auch für die definiten Formen zu entwickeln. Um aber vor Weihnachten zu einem guten Abschluss zu kommen, sei es gestattet, hierbei nur die Resultate anzugeben. Sie finden übrigens alles Wesentliche über definite Formen auch in der Literatur vor.

Sei $f = ax^2 + bxy + cy^2$ eine definite Form, für welche also $D = b^2 - 4ac < 0$ ist. Wir setzen $D = -\Delta$, so dass Δ positiv ist. Die Coefficienten a und c haben nothwendiger Weise dasselbe Vorzeichen; wir wollen der Bestimmtheit wegen annehmen, dass beide positiv und, dass wir es also mit einer positiven Form f zu thun

haben. Wir bringen unsere Bemerkungen unter eine Reihe von Punkten.

1. Die geometrische Deutung im Gitter wird, wie wir schon früher sahen, bei den definiten Formen besonders einfach. Man reicht dabei nämlich mit der gewöhnlichen Maassbestimmung aus. Das Fundamentalparallelogramm des zur Form f gehörigen Gitters hat die Seitenlängen $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$ und einen eingeschlossenen Winkel χ von der Grösse $\cos\chi = \frac{-b}{2\sqrt{ac}}$. Die Gittertheorie der definiten Formen ist bereits von Dirichlet viel benutzt worden und ausserordentlich klar in Crelle Bd. 40 auseinandergesetzt worden. Nur bei der Redaction seiner Vorlesungen ist sie leider fortgelassen worden.

2. Das Gitter, welches wir zu der Form f hinzuconstruiren, ist zunächst ein Parallelengitter. Denken wir uns aber die Gitterstäbe weg und achten nur noch auf die Gitterpunkte, so bekommen wir ein Punktgitter. Das Punktgitter ist nicht für die einzelne Form f, sondern für die ganze Klasse der mit f aequivalenten For-

men characteristisch.

3. Aus der Formenklasse heben wir eine besonders einfache Form heraus, die wir reducirte Form nennen. Dieselbe wird folgendermassen definirt. Wir suchen unter allen Gitterpunkten denjenigen auf, welcher von O die kleinste Entfernung hat. Die Richtung von O nach diesem Punkte wählen wir zur x-Axe, seine Entfernung von O liefert die erste Parallelogrammseite γA.

Unter allen nicht auf der x-Axe gelegenen Gitterpunkten suchen wir sodann denjenigen mit der nächstkleinsten Entfernung von O heraus. Die Lage dieses Punktes liefert die y-Axe, seine Entfernung von O die Parallelogrammseite γC. Die auf dieses Coordinatensystem transformirte gegebene Form nennen wir die zu f gehörige reducirte Form; sie laute

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2.$$

Bei der Bestimmung des reducirten Coordinatensystems können wir sowohl den x- wie den y-Vector ebenso gut

nach der einen wie nach der anderen Seite von 0 aus ziehen, weil zu jedem Punkte im Gitter auch der diametrale Punkt vorhanden ist. Abgesehen von dieser Unbestimmtheit gibt es im Allgemeinen nur ein Coordinatensystem, welches die geforderten Eigenschaften hat und also auch nur eine reducirte Form. Bei besonderen Symmetrieverhältnissen des Gitters kann jedoch unsere Construction auch zwei- und dreideutig werden; dann gibt es zwei oder drei reducirte Formen in derselben Klasse.

5. Das arithmetische Kennzeichen einer reducirten Form sind die folgenden Ungleichungen:

$$|B| \leqq A \leqq C.$$

Speciell ergibt sich für den ersten Coefficienten A einer reducirten Form die Beziehung

$$A \leqq \sqrt{\frac{\Delta}{3}}.$$

6. Die Herstellung der reducirten Form (A, B, C) aus einer gegebenen Form (a, b, c) erfolgt auch hier durch alternirende

Benutzung der Operationen S und S'.. Man transformirt nämlich (a, b, c) abwechselnd mittelst S^u und S'^r, wobei man allemal u und r so wählt, dass der mittelste Coefficient der transformirten Form so klein wie möglich wird. So kommt man schliesslich durch eine endliche Anzahl von Schritten zu einem absolut kleinsten Werte B und zu der zugehörigen reducirten Form.

7. Dieser Process hängt wieder enge mit der Kettenbruchentwickelung für die Wurzeln von f, die Grössen

$$\left.\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$$

zusammen.

Soviel über die allgemeine Theorie der definiten Formen bei beliebigen a, b, c. Bei ganzzahligen (oder commensurabeln) Coefficienten finden die folgenden besonderen Verhältnisse statt.

1. Bei gegebenem D gibt es nur eine endliche Anzahl von Klassen. Es gibt

nämlich wegen der Begrenzungen, denen die Coefficienten der reducirten Formen unterworfen sind, nur eine endliche Anzahl von solchen Formen. Wir erwähnten bereits, dass A kleiner als $\sqrt{\frac{\Delta}{3}}$ wird. Es gibt also nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werte von A.

Ferner ist B kleiner als A und C durch A, B und Δ mitbestimmt.

Die Anzahl der zu gegebener Discriminante $\Delta < 100$ gehöriger Klassen kann man in's Besondere aus den obencitirten Cayley'schen Tabellen entnehmen.

2. Man wird auch hier nach den Automorphieen fragen. Was die <u>eigentlichen Automorphieen</u> (welche die Determinante $+1$ haben) betrifft, so ergeben sich diese wieder aus der <u>Pell'schen Gleichung</u>. Dieselbe lautet jetzt:

$$t^2 + \Delta u^2 = 4.$$

Ihre Theorie wird ungemein einfach. Ist nämlich $\Delta > 4$, so gibt es nur die eine triviale Lösung $t = \pm 2$,

$u = 0$. Ausserdem existiren im Falle $\Delta = 3$ und $\Delta = 4$, wo die reducirten Formen

$$x^2 + xy + y^2$$

bez. $x^2 + y^2$

lauten werden, noch einige wenige nicht trivialen Lösungen. Am deutlichsten werden diese Verhältnisse, wenn man an den Pell'schen Winkel Φ denkt, welcher jetzt einen gewöhnlichen Winkel bedeutet. Die Automorphie ist dann eine gewöhnliche Drehung des Gitters um O durch diesen Winkel, bei welcher das Gitter in sich übergeht. Der Lösung $t = -2$, $u = 0$ entspricht der Winkel $\Phi = \pi$. Im Allgemeinen geht das Gitter nur bei einer Drehung um π (oder 2π) in sich über, was ja selbstverständlich ist. Für die besonderen Werte $\Delta = 3$ o. der $\Delta = 4$ dagegen hat der Pell'sche Winkel die Grösse $\pi/3$ oder $\pi/4$. Das Gitter ist dann ein gleichseitiges oder ein quadratisches Gitter, welche ihrer besonderen Symmetrie wegen

bereits bei einer Drehung um $\pi/3$ oder $\pi/4$ mit sich zur Deckung kommen.

3. Auch die uneigentlichen Automorphien (von der Determinante -1) lassen sich mit einem Worte erledigen. Das Vorhandensein einer uneigentlichen Automorphie bedeutet, daß das Gitter mit sich invers congruent ist, also durch Spiegelung in sich übergeht. Dies findet nur statt bei den <u>rechteckigen und den rhombischen Gittern</u>. Benutzen wir unsere obige Bezeichnung von pg. 162, so können wir sagen: Die einzigen Ancepsklassen, welche in der Theorie der definiten Formen möglich sind, sind diejenigen mit einem rechteckigen oder rhombischen Punktgitter.

II. Hauptteil:

Die Reductionstheorie in ihrer Wirkung auf die Gesammtheit der binären quadratischen Formen.

---

o. d. 10. I. 95. Nachdem wir im ersten Hauptteile die einzelne quadratische Form untersucht und in's Besondere ihre Reduction durchgeführt haben, soll es sich jetzt darum handeln, die Gesammtheit der zu gegebenem D gehörigen quadratischen Formen zu überblicken und die Stellung der reducirten Formen innerhalb dieser Gesammtheit zu characterisiren.

1. Allgemeiner Ansatz.

Wir recapituliren kurz die Definition der reducirten Formen. Dieselbe fiel verschieden aus, je nachdem $D < 0$ oder $D > 0$ war. Bei negativem D wurde eine Form (a, b, c) reducirt genannt,

wenn

$$|b| \leqq a \leqq c$$

war; die Coefficienten a und c wurden dabei als positiv vorausgesetzt, indem es genügte, von den positiven definiten Formen zu sprechen. Durch die vorstehenden Ungleichungen war die reducirte Form in eindeutiger Weise festgelegt, wenn wir von gewissen Ausnahmewerten von D' absahen, die wir bald noch eingehender untersuchen werden.

Ist dagegen $D' > 0$, so sollte eine Form (a, b, c) reducirt heissen, wenn

$$a\,c \leqq 0.$$

Hier gab es im Allgemeinen zu einer vorgelegten Form unendlich viele reducirte Formen, die sich nur für commensurable a, b, c auf eine endliche Zahl reducirten.

Für den Zweck, den wir nunmehr verfolgen: den Zusammenhang der verschiedenen quadratischen Formen zu überblicken: ist die Darstellung der Formen im Gitter nicht mehr

bequem, denn es ist nicht leicht, die gegenseitige Lage von unendlich vielen Gittern zu erfassen. Wir wählen jetzt eine ganz andere Art von geometrischer Repräsentation. Wir deuten nämlich einfach die Coefficienten a, b, c, der Form als gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten im R_3, d. h. als Coordinaten eines Punktes.

Wir construiren uns zunächst die Fläche $b^2 - 4ac = 0$, welche einen Kegel darstellt. Ferner markiren wir den Ort der Punkte, für welche $b^2 - 4ac = D^2$ ist. Wir erhalten so, indem wir D^2 verschiedene Werte erteilen, eine Schaar von Hyperboloiden, welche alle den genannten Kegel zum Asymptotenkegel haben. Je eines dieser Hyperboloide stellt die sämmtlichen Formen von gleichem D^2 dar. Die Hyperboloide sind zum Teil einschalige, zum Teil zweischalige. Die einschaligen Hyperboloide liegen im Äusseren des Asymptotenkegels. Dieselben gehören zu positiven Werten

von D', repräsentiren also die indefiniten Formen. Die zweischaligen Hyperboloide liegen im Innern des Kegels. Die eine Schale senkt sich in die eine, die andere Schale in die zweite Öffnung des Kegels vom Unendlichen herein. Diese Hyperboloide gehören zu negativem D'. u. zw. stellt die eine Schale die definiten positiven, die andere die definiten negativen Formen der Discriminante D' dar.

Bei dem Studium des Aequivalenzproblemes kommt es auf die Substitutionen $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in den x, y an. Dieselben schreiben sich, als Substitutionen der nunmehrigen Variabeln a, b, c aufgefasst, folgendermassen:

$$a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2,$$
$$b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta,$$
$$c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2.$$

Sie bilden in ihrer Gesammtheit eine <u>discontinuirliche Gruppe affiner Umformungen des Raumes</u>, bei welchen (da die Discriminante durch die Substi-

tution (α, β, γ, S) nicht geändert wird) unsere sämmtlichen Hyperboloide u. in's Besondere unser Kegel in sich übergehen. Dies wäre das vollständige geometrische Gegenbild der zu betrachtenden arithmetischen Verhältnisse. Wir werden von diesem Bilde jedoch keinen Gebrauch machen, sondern wählen ein unvollständiges schlechteres Bild u. zw. lediglich aus dem Grunde, weil die Vorstellung und namentlich weil die Zeichnung der räumlichen Dinge zu schwierig ist.

Wir werden nämlich in der Folge nur auf die Verhältnisse der a, b, c achten und die Grössen $a : b : c$ als Dreieckscoordinaten in der Ebene, sagen wir kurz: als Punkt im R_2 deuten.

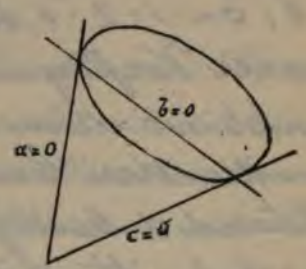
Unsere obigen Transformationsformeln lauten jetzt, da doch nur die Verhältnisse der a, b, c eine geometrische Bedeutung haben sollen:

$$\rho a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$$
$$\rho b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta$$
$$\rho c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2.$$

Diese Transformationen stellen jetzt in ihrer Gesammtheit eine Gruppe von projectiven Umformungen der Ebene $a : b : c$ dar. In der Ebene markiren wir uns den Kegelschnitt $b^2 - 4ac = 0$, derselbe bleibt bei den projectiven Transformationen unserer Gruppe ungeändert. Von dem absoluten Werte der Discriminante $b^2 - 4ac$ kann natürlich keine Rede mehr sein.

Wir kommen so von der affinen Geometrie im R_3 zu der projectiven im R_2. Unsere neue Deutung ist dabei im Grunde nichts anderes, als eine Projection des vorigen räumlichen Bildes, nämlich die Projection vom Coordinatenanfangspunkt des R_3 aus auf eine irgendwie gestellte Bildebene. Ein ähnliches Verhältnis findet ganz allgemein statt. Man kommt von einer gewöhnlichen Coordinatenbestimmung im R_{n+1} zu einer projecti-

r im R_n, indem man jenen auf
esen projiciert.
Inunserem Falle hat das Coordinatensystem
e charakteristische Lage gegen den Funda-
entalen Kegelschnitt $b^2 - 4ac = 0$. Es
d nämlich die 2 Seiten $a = 0$, $c = 0$ des
ordinatendreiecks Tangenten an den
gelschnitt, während die dritte $b = 0$.
e Berührungssehne jener Tangenten
t. Wir haben den Kegelschnitt neben-
hend als Ellipse
zeichnet. Das ist
türlich völlig will-
rlich; denn in der
rojectiven Geometrie
ibt es keinen Unter-
hied zwischen El-
ipse, Hyperbel und Parabel; oder
as dasselbe besagt, bei Benutzung
rojectiver Coordinaten stellt die
leichung $b^2 - 4ac = 0$ bei geeigneter
ahl des Coordinatensystems jeden
eliebigen Kegelschnitt dar.
Wir werden die in der Lage des Coor-
inatensystems zur Verfügung stehende



Willkür dazu benutzen, unsere Figur besonders einfach zu gestalten. Wir wollen zwei Seiten des Coordinatendreiecks ($a=0$ und $c=0$) parallel und im Abstande 2 zu einander legen und die dritte ($b=0$) rechtwinklich zu ihnen annehmen. Dem alsdann noch völlig willkürlichen Einheitspunkte geben wir den Abstand $1, \frac{1}{2}, 1$ bez. von $a=0$, $b=0$, $c=0$. Unser Kegelschnitt geht durch den Pünkt $a:b:c = 1:2:1$ hindurch, zufolge unserer Verfügung über den Einheitspunkt ist dieses ein Pünkt, welcher von den drei Coordinatenaxen je den Abstand 1 besitzt. Ausserdem muss der Kegelschnitt die Linien $a=0$ und $c=0$ in Pünkte $0,0,1$ bez. $1,0,0$ berühren. Durch diese Bedingungen ist der Kegelschnitt eindeutig bestimmt. Nun genügt aber der in der Figur verzeichnete Kreis vom Radius 1 je.

nen Bedingungen. Mithin wird vermöge unserer besonderen Annahme des Coordinatensystems der fundamentale Kegelschnitt zum Einheitskreise.

Im Übrigen ist diese Specialisirung des Coordinatensystems ganz unwesentlich und geschieht lediglich aus Bequemlichkeitsrücksichten. Es kann als gute Übung in der projectiven Geometrie empfohlen werden, die folgenden Constructionen bei einer beliebigen Hyperbel durchzuführen.

Wir wollen die Punkte des Kreises durch einen Parameter individualisiren. Zu dem Zweck schreiben wir die Gleichung des Kreises in die Form:

$$\frac{b}{2a} = \frac{2c}{b} = -\omega$$

oder

$$2a : -b : 2c = 1 : \omega : \omega^2,$$

womit die Parameterdarstellung des Kreises geleistet ist.

Wir legen ferner die Tangente an den Kreis im Punkte a', b', c'. Ihre Gleichung ist

$$bb' - 2ac' - 2a'c = 0,$$

wo a, b, c die laufenden Coordinaten eines Tangentenpunktes sind. Bedeutet w den zum Berührungspunkte gehörigen Parameter, so können wir die Gleichung der Tangente auch schreiben:

$$a w^2 + b w + c = 0.$$

Hieraus berechnet man

$$w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

als Parameter derjenigen beiden Punkte des Kreises, nach welchen vom Punkte a, b, c aus Tangenten verlaufen. Daran schliessen sich zwei Bemerkungen an: 1.) Im Innern des Kreises muss $b^2 - 4ac$ negativ, im Äusseren positiv sein, denn die von einem innern bez. äusseren Punkte auslaufenden Tangenten sind imaginär bez. reell. Für die quadratischen Formen bedeutet dieses Folgendes: Die definiten Formen finden im Innern des Kreises, die indefiniten ausserhalb desselben ihre Interpretation. 2.) Setzen

wir $w = \frac{x}{y}$, so geht die Gleichung der Tangente über in

$$a x^2 + b x y + c y^2 = 0.$$

Daraus folgt: die beiden Wurzeln von $\frac{x}{y}$, welche wir durch Nullsetzen der quadratischen Form erhalten, sind die Parameter w derjenigen beiden Kreispunkte, in denen die vom Punkte a, b, c ausgehenden Tangenten den Kreis berühren. Hieraus folgt, dass w bei der auf pg. 178 gegebenen Collineation einerseits die lineare Substitution $w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$ erfährt; Collineation und Substitution sind wechselseitig eindeutig aneinander gebunden.

2. Die definiten quadratischen Formen und die Punkte im Innern des Kegelschnittes.

Wir wenden uns nun speciell zu den definiten Formen, studiren also das Innere des Kreises. Hier grenzen

wir uns zunächst den Raum für die reducirten Formen ab. Nehmen wir in den die reducirten Formen definirenden Bedingungen

$$|b| \leqq a \leqq c$$

die Gleichheitszeichen, so erhalten wir die Begrenzung des gesuchten Raumes. Dieselbe wird gebildet von den Geraden $b = a$, $b = -a$ und $a = 0$. Die Gerade $b - a$ ist die Verbindungslinie des Punktes 0, 0, 1 mit dem Einheitspunkte E; ferner ist $b = -a$ die Verbindungslinie des Punktes 0, 0, 1 mit dem in Bezug auf $b = 0$ zu dem Punkte E symmetrisch gelegenen Punkte E'. Endlich ist $a = c$ die Gerade E E'. Das von diesen drei Geraden eingeschlossene Dreieck bildet den „reducirten Raum" für die definiten Formen. Dies Dreieck wird

noch durch die Gerade b. o in zwei Teildreiecke zerlegt, von denen wir das eine schraffirt, das andere nicht schraffirt haben. wir nennen das einzelne dieser beiden Dreiecke ein „Fundamentaldreieck"

Nun gibt es, wie wir wissen, zu jeder definiten quadratischen Form eine und im Allgemeinen auch nur eine reducirte Form, welche mit ihr aequivalent ist. Mit anderen Worten: Es ist möglich einen jeden Punkt des Kreisinnern durch eine der $(\alpha, \beta, \gamma, S)$ Collineationen in einen und im Allgemeinen auch nur in einen Punkt des reducirten Raumes hineinzubringen. Wenden wir umgekehrt alle die unendlich vielen Collineationen $(\alpha, \beta, \gamma, S)$ auf den reducirten Raum an, so erhalten wir eine unendliche Anzahl von weiteren Dreiecken. Dieselben müssen nach dem eben Gesagten das Innere des Kreises lückenlos und einfach überdecken.

ei. d. 10. I. Die so entstehende Figur

hat in der vorliegenden Theorie und im Anschlusse daran z. B. auch in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen eine fundamentale Bedeutung. Um die Figur vollständig zu entwickeln, lösen wir erst eine etwas andere Aufgabe, nämlich wir construiren auf der Peripherie des Kreises eine Scala der in dem Parameter w rationalen Punkte. Dabei gehen wir von den drei Punkten $w = 0, \infty, 1$ aus. In unserer Kreisfigur sind dieses bez. die Punkte mit den homogenen Coordinaten $0,0,1;\ 1,0,0;\ 1,-2,1$, d. h. drei Punkte in sehr specieller Lage. Wir können aber ebensogut von drei beliebigen Punkten auf einem beliebigen Kegelschnitt ausgehen, diesen Punkten die Parameter $0, \infty, 1$ beilegen, und nach denjenigen Punkten fragen, welche in Bezug auf sie rational sind. In der That brauchen wir nur zwei der gegebenen Punkte herauszugreifen und in diesen die Tangenten an den gegebenen Kegelschnitt zu legen. Dann liefern uns diese Tangenten zusammen mit der Berührungssehne

ein Coordinatendreieck, in Bezug auf welches der Kegelschnitt die Gleichung $b^2 - 4ac = 0$ annimmt. Bestimmen wir jetzt den Parameter w so, wie es oben geschehen, so erhalten die zwei auf dem Kegelschnitt gelegenen Ecken des Coordinatendreiecks die Parameter $w = 0$ und $w = \infty$. Durch passende Wahl des Einheitspunktes können wir dann noch erreichen, dass der dritte der gegebenen Punkte den Parameter $w = 1$ erhält. Indem wir in solcher Weise von einem allgemeinen Kegelschnitt und drei beliebigen Punkten A, B, C auf ihm ausgehen, haben wir den Vorteil, dass die projective Bedeutung der jetzt zu beschreibenden Constructionen klarer wird, wie wenn wir an unserer speciellen Figur operiren würden.

Bei allen Constructionen der projectiven Geometrie ist der fundamentale Process dieser: zu 3 gegebenen Elementen A, B, C das 4te harmonische D zu construiren. Sind

die Elemente A, B, C Punkte einer Gera-
den oder Strahlen eines Büschels, so ist
die Construction des 4ten harmonischen
vollauf bekannt. Liegen aber die Punkte
A, B, C wie hier auf einem Kegelschnitt,
so müssen wir zuerst definiren, wann wir
vier Punkte eines Kegelschnitts harmo-
nisch nennen wollen. Diese Definition
stützt sich auf den Satz, dass das Dop-
pelverhältnis von 4 Strahlen, welche
irgend 4 Punkte des Kegelschnitts von
einem 5ten Punkte des Kegelschnitts aus
projiciren, unabhängig ist von der La-
ge dieses Punktes. Man bezeichnet all-
gemein als Doppelverhältnis von vier
Punkten des Kegelschnitts eben das
Doppelverhältnis von vier solchen pro-
jicirenden Strahlen. Hiernach können
wir entscheiden, wann vier Punkte
A, B, C, D auf dem Kegelschnitt
harmonisch liegen, d. h. wann das
Doppelverhältnis der projicirenden
Strahlen gleich – 1 ist. Wir behaupten:
Die Punkte liegen harmonisch, wenn
die Verbindungslinien AB und

CD conjugirte Polaren sind. In diesem Falle ist nämlich A' (vergl. die Figur), der Pol von AB, auf CD gelegen. Projiciren wir nun die Punkte $ABCD$ speciell von A aus, so ergeben sich als projicirenden Strahlen die Geraden AC, AD, AA', AB'. Dieselben sind harmonisch, weil es ihre Schnittpunkte C, D, A', B' mit der Geraden CD nach Voraussetzung sind. Also liegen auch die Punkte A, B, C, D harmonisch, w. z. b. w.

Hiernach stellt sich die Construction des zu A, B, C gehörigen vierten harmonischen Punktes D folgendermassen. Wir construiren den Pol A' zu der Geraden AB und verbinden A' mit C. Der zweite Schnittpunkt der Geraden $A'C$ mit dem Kegelschnitt ist der gesuchte Punkt D.

Daneben stellen wir das analytische

Kriterium für die harmonische Lage.

Eine Gerade, welche die Punkte $a=0, b=0$ und $a=a', b=b'$ verbindet, hat die Gleichung

$$ab' - ba' = 0.$$

Ist a', b' ein Punkt des Kegelschnittes mit dem Parameter w, so wird zufolge der Einführung des Parameters $w \cdot a' : -b' = 1 : 2w$. Mithin lauten die Gleichungen derjenigen vier Strahlen, welche die Punkte w_1, w_2, w_3, w_4 mit der auf dem Kegelschnitt gelegenen Coordinatenecke $a=0, b=0$ verbinden:

$$b + 2w_1 a = 0$$
$$b + 2w_2 a = 0$$
$$b + 2w_3 a = 0$$
$$b + 2w_4 a = 0.$$

Das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen hat bekanntlich den Wert

$$\lambda = \frac{w_1 - w_4}{w_1 - w_4} : \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_4}.$$

Setzen wir nach homogen machend

$$w_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad w_2 = \frac{x_2}{y_2},$$

so können wir unter Einführung von zwei neuen Parametern μ und ν schreiben

$$w_3 = \frac{x_1 + \mu x_2}{y_1 + \mu y_2}, \quad w_4 = \frac{x_1 + \nu x_2}{y_1 + \nu y_2}$$

Dann findet man durch einfache Umrechnung

$$\lambda = \frac{\mu}{\nu}$$

Soll also $\lambda = -1$ werden, so muss $\nu = -\mu$ sein. Hiernach können wir das analytische Kriterium für die harmonische Lage folgendermassen formuliren: Sind 3 Punkte des Kegelschnittes mit den Parametern

$$w_1 = \frac{x_1}{y_1}, \; w_2 = \frac{x_2}{y_2}, \; w_3 = \frac{x_1 + \mu x_2}{y_1 + \mu y_2}$$

gegeben, so ist der zugehörige vierte harmonische Punkt der folgende:

$$w_4 = \frac{x_1 - \mu x_2}{y_1 - \mu y_2}.$$

Es ist klar, dass wenn wir von rationalen Punkten w_1, w_2, w_3 ausgehen, wir durch unsere Construction und die parallel laufende Rechnung

Kriterium für die harmonische Lage.

Eine Gerade, welche die Punkte $a=0, b=0$ und $a=a', b=b'$ verbindet, hat die Gleichung

$$ab' - ba' = 0.$$

Ist a', b' ein Punkt des Kegelschnittes mit dem Parameter w, so wird zufolge der Einführung des Parameters $w \cdot a' : -b' = 1 : 2w$. Mithin lauten die Gleichungen derjenigen vier Strahlen, welche die Punkte w_1, w_2, w_3, w_4 mit der auf dem Kegelschnitt gelegenen Coordinatenecke $a=0, b=0$ verbinden:

$$b + 2w_1 a = 0$$
$$b + 2w_2 a = 0$$
$$b + 2w_3 a = 0$$
$$b + 2w_4 a = 0.$$

Das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen hat bekanntlich den Wert

$$\lambda = \frac{w_1 - w_4}{w_1 - w_3} : \frac{w_2 - w_4}{w_2 - w_3}.$$

Setzen wir nach homogen machend

$$w_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad w_2 = \frac{x_2}{y_2},$$

so können wir unter Einführung von zwei neuen Parametern μ und ν schreiben

$$w_3 = \frac{x_1 + \mu x_2}{y_1 + \mu y_2}, \quad w_4 = \frac{x_1 + \nu x_2}{y_1 + \nu y_2}$$

Dann findet man durch einfache Umrechnung

$$\lambda = \frac{\mu}{\nu}$$

Soll also $\lambda = -1$ werden, so muss $\nu = -\mu$ sein. Hiernach können wir das analytische Kriterium für die harmonische Lage folgendermassen formuliren: Sind 3 Punkte des Kegelschnittes mit den Parametern

$$w_1 = \frac{x_1}{y_1}, \; w_2 = \frac{x_2}{y_2}, \; w_3 = \frac{x_1 + \mu x_2}{y_1 + \mu y_2}$$

gegeben, so ist der zugehörige vierte harmonische Punkt der folgende:

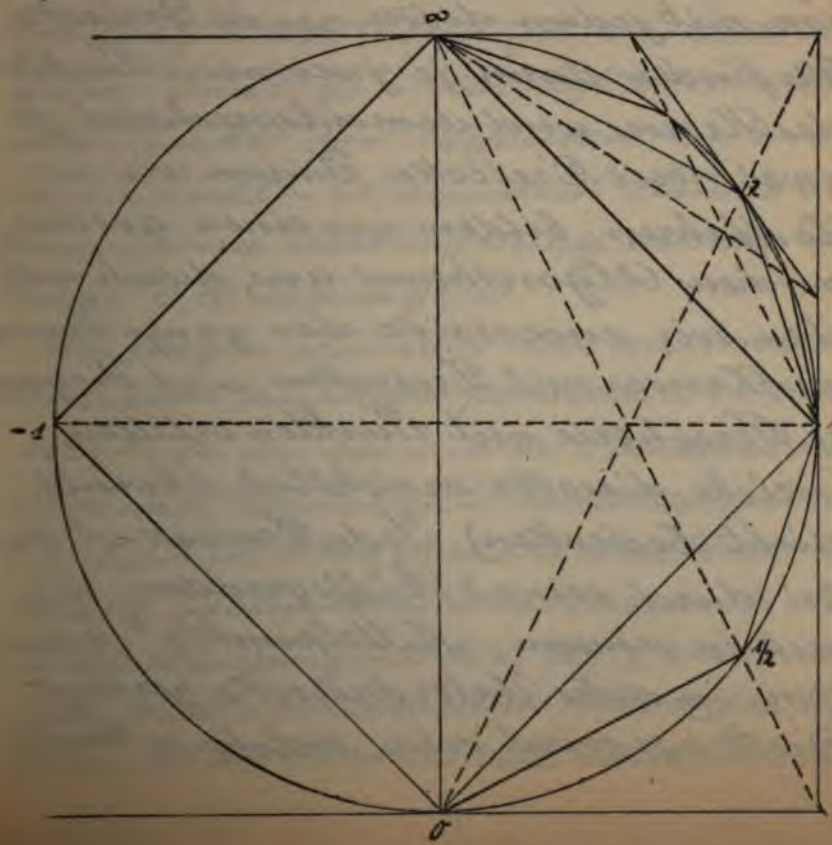
$$w_4 = \frac{x_1 - \mu x_2}{y_1 - \mu y_2}.$$

Es ist klar, dass wenn wir von rationalen Punkten w_1, w_2, w_3 ausgehen, wir durch unsere Construction und die parallel laufende Rechnung

immer wieder zu rationalen Punkten geführt werden. –

Wir gehen nun auf unsere specielle Kreisfigur zurück und construiren zu den Punkten 0, 1, ∞ auf alle Weisen den vierten harmonischen Punkt, indem wir unsere Construction auf den vorliegenden Fall specialisiren. Wir suchen also die Pole bez. zu den Geraden 0, 1; 1, ∞; ∞, 0 auf und verbinden diese bez. mit den Punkten ∞, 0, 1. Die zweiten Schnittpunkte der Verbindungslinien mit dem Kreise liefern uns die drei 4ten harmonischen Punkte, welche bei veränderter Reihenfolge der Punkte 0, 1, ∞ möglich sind. Jene drei Verbindungsgeraden – wir können sie die „Hülfsgeraden" nennen – schneiden sich, wie man sieht in einem Punkte. Es folgt dieses aus dem Brianchon'schen Satze, nach welchem sich bekanntlich in jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Sechsecke die 3 Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkte tref-

fen. Lässt man nämlich das allgemeine Sechseck in die drei doppelt zu zählenden Tangenten in den Punkten 0, 1, ∞ ausarten, so gehen die drei Verbindungslinien, von welchen der Brianchon'sche Satz spricht, in unsere drei Hülfsgeraden über. Den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Hülfsgeraden können wir etwa als den „Mittelpunkt" des Dreiecks 0,1,∞ bezeichnen. Analytisch sind die drei



neuen auf der Kreisperipherie construirten Punkte nach der soeben abgeleiteten Formel für das Doppelverhältnis durch die Parameter $\frac{1}{2}, 2, -1$ bestimmt.

Zu unserem Ausgangsdreiecke $1\,\infty$ haben wir durch diese Construction 3 neue Dreiecke hinzugezeichnet, nämlich die Dreiecke $\infty, 2, 1$; $-1, \frac{1}{2}, 0$; $0, -1, \infty$. Jetzt wiederholen wir dieselbe Construction mit jedem dieser neuen Dreiecke. Wir finden dann je zwei neue Punkte des Kreises und dementsprechend je zwei neue Dreiecke. Indem wir so fortfahren, bilden wir einen geometrischen Algorithmus aus, durch welchen wir successive das ganze Innere des Kreises mit Dreiecken und die ganze Peripherie mit Punkten erfüllen, (welche dieselbe ersichtlich überall dicht bedecken). Jedes Dreieck ist dabei durch seine 3 Hülfsgeraden, die sich in seinem „Mittelpunkte" kreuzen, in sechs Unterdreiecke zerlegt. Die Frage wird sein, welche w Werthe

den construirten Dreiecksecken zugehören, überhaupt wie sich unser geometrischer Process im analytischen Gewande darstellt.

Bo. d. 16. I. 96. Hierbei können wir uns auf denjenigen Teil der Figur beschränken, welcher rechts von der Geraden $0\,\infty$ liegt und welcher die Punkte mit positivem Parameter w enthält. Die Verteilung des Parameters in der linken Hälfte der Figur ist nämlich eine ganz analoge: hier befinden sich die Punkte mit negativem w, wobei der Punkt $-w$ aus dem Punkte $+w$ durch eine Umklappung um die Gerade $0\,\infty$ hervorgeht.

Wir fragen also nach dem arithmetischen Character derjenigen positiven w-Werte, welche zu den bei unserer Construction successive erreichten Dreiecken gehören. Zunächst ist klar, dass alle diese Werte rationale Zahlen sind; denn einerseits sind es die Ausgangswerte 0, ∞, 1, anderererseits ist die Construction des vierten harmonischen Punktes eine rationale Ope-

ration. Wir schreiben daher die Parameter in die Form $\frac{a}{c}$, wobei wir die Spaltung des w in Zähler und Nenner allemal so vornehmen, dass diese positiv sind und keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Für die Punkte $w=0$ und $w=\infty$, wo diese Spaltung unbestimmt wird, setzen wir die Zerlegungen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$ fest.

Es seien nun $\frac{a}{c}$ und $\frac{c}{d}$ die beiden Eckpunkte einer Seite irgend eines unserer Constructionsdreiecke, wobei $\frac{a}{c}$ derjenige der beiden Eckpunkte sein möge, welcher den grösseren Parameter besitzt, so dass $\frac{a}{c} > \frac{c}{d}$. Gehen wir in der Construction einen Schritt weiter, so legt sich an die genannte Dreiecksseite ein neues Dreieck an, welches einen neuen rationalen Punkt unserer Scala liefert. Wir behaupten dann:

1.) Für die beiden Eckpunkte $\frac{a}{c}$ und $\frac{c}{d}$ gilt die Relation

$$a\,d - b\,c = 1$$

2.) Der Parameter der dritten Ecke des neuen Dreiecks berechnet sich aus den Parametern $\frac{a}{c}$ und $\frac{c}{d}$ der beiden

anderen Ecken nach der Formel:

$$w = \frac{a+c}{b+d} .$$

Diese Behauptungen beweisen wir durch vollständige Induction. Was zunächst die Ausgangspunkte $\frac{a}{b} = \frac{1}{0}$ und $\frac{c}{d} = \frac{0}{1}$ betrifft, so genügen diese der Relation 1); auch hat der durch unsere Construction zunächst gelieferte Punkt 1 die sub 2) angegebene Form $w = \frac{1+0}{0+1}$. Indessen war die Benennung dieser drei Punkte doch nur eine conventionelle; sie ergab sich nicht als nothwendige Folge aus unserer Construction. Um daher die Richtigkeit unserer Angaben für den ersten Schritt des Verfahrens darzuthun, gehen wir auf die Dreiecksseite $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, $\frac{c}{d} = \frac{0}{1}$ ein und betrachten ausserdem den Punkt $w = \frac{1}{2}$. Für diese bestehen die Behauptungen 1) und 2) ersichtlich gleichfalls zu recht. Wir nehmen nun an, dass wir durch eine beliebige Anzahl von Constructionen zu einem Dreiecke gelangt sind, dessen Eckpunkte,

den angegebenen Regeln entsprechend die Parameter haben:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d} \quad \text{mit } ad - bc = 1.$$

An dieses Dreieck setzen sich durch eine abermalige Wiederholung unserer Construction zwei neue Dreiecke an. Wir betrachten dasjenige Dreieck, welches mit dem vorhergehenden die Seite $\frac{a+c}{b+d}$ bis $\frac{c}{d}$ gemein hat. Die Frage wird sein, ob auch die Ecken dieses Dreiecks den angegebenen Regeln genügen. Zwei seiner Ecken sind uns bekannt; es sind dieses die Punkte $\frac{a+c}{b+d}$ und $\frac{c}{d}$. Wir bezeichnen dieselben jetzt kürzer mit $\frac{a'}{b'}$ bez. $\frac{c'}{d'}$, und bemerken, daß wir danach statt $\frac{a}{b}$ auch schreiben können: $\frac{a'-c'}{b'-d'}$.

Es ist nun erstlich

$$a'd' - b'c' = (a+c)d - (b+d)c = ad - bc = 1,$$

so daß die Behauptung 1) auch für das neue Dreieck richtig ist. Die dritte Ecke des in Rede stehenden Dreiecks ist unserer Construction zufolge als vierter harmonischer Punkt zu den Ecken

$\frac{a'}{b'}, \frac{c'}{d'}$ und $\frac{a}{b} = \frac{a'-c'}{b'-d'}$

bestimmt. Nach pg. 191 hat dieser vierte harmonische Punkt daher den Parameter

$$\frac{a'+c'}{b'+c'}.$$

Damit ist auch die Richtigkeit unserer Behauptung 2) für das neue Dreieck bewiesen. Hiethin gelten unsere obigen Regeln überhaupt für jedes Dreieck, welches durch beliebige Wiederholung unserer Construction erreicht wird.

Den Kernpunkt dieses Beweises erblikken wir darin, daß nach Verabredung die Spaltung der Parameterwerte in einen Zähler und Nenner ohne gemeinschaftlichen Teiler erfolgte. Hierauf stützten wir uns wesentlich im Vorstehenden, indem wir aus der Gleichung $\frac{a'}{b'} = \frac{a+c}{b+d}$ folgerten:

$$a' = a+c, \quad b' = b+d.$$

Wir betrachten einmal die ganze Reihe der nach einer gewissen Anzahl von Constructionen erreichten positiven Parameterwerte. Sie möge aus den

folgenden Brüchen bestehen:

$$\frac{1}{0}, \ldots \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots \ldots, \frac{0}{1}.$$

Diese Reihe liefert uns die bis zu einem gewissen Grade der Dichtigkeit gediehene Scala unserer rationalen Punkte. Dabei gilt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Werten der Reihe die Relation $ad - bc = 1$. Wollen wir die Scala weiter vervollständigen, so haben wir die Werte $\frac{a+c}{b+d}$ zwischenzuschalten. Mit Reihen dieser Art beschäftigt sich Hurwitz im 44ten Bande der Mathem. Annalen (1894). Er nennt dieselben Farey'sche Reihen (nach dem englischen Mathematiker Farey, welcher von der Theorie der musikalischen Intervalle ausgehend auf diese Reihen geführt wurde).

Wir fragen nun weiter, welche rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ bei unserer Construction als Dreiecksseiten auftreten. Die Antwort hierauf lautet einfach folgendermassen: Unser Process liefert successive alle rationa-

len Zahlen $\frac{a}{b}$ und alle rationalen Zahlenpaare $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ von der Determinante $ad - bc = 1$. Den Beweis hierfür knüpfen wir an die uns bekannten Sätze über Kettenbruchentwickelung an. Indem wir eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch entwickeln, construieren wir eine Reihe von Näherungsbrüchen $\frac{p}{q}$, zwischen welchen die Recursionsformeln bestehen.

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{a_r p_{r-1} + p_{r-2}}{a_r q_{r-1} + q_{r-2}} .$$

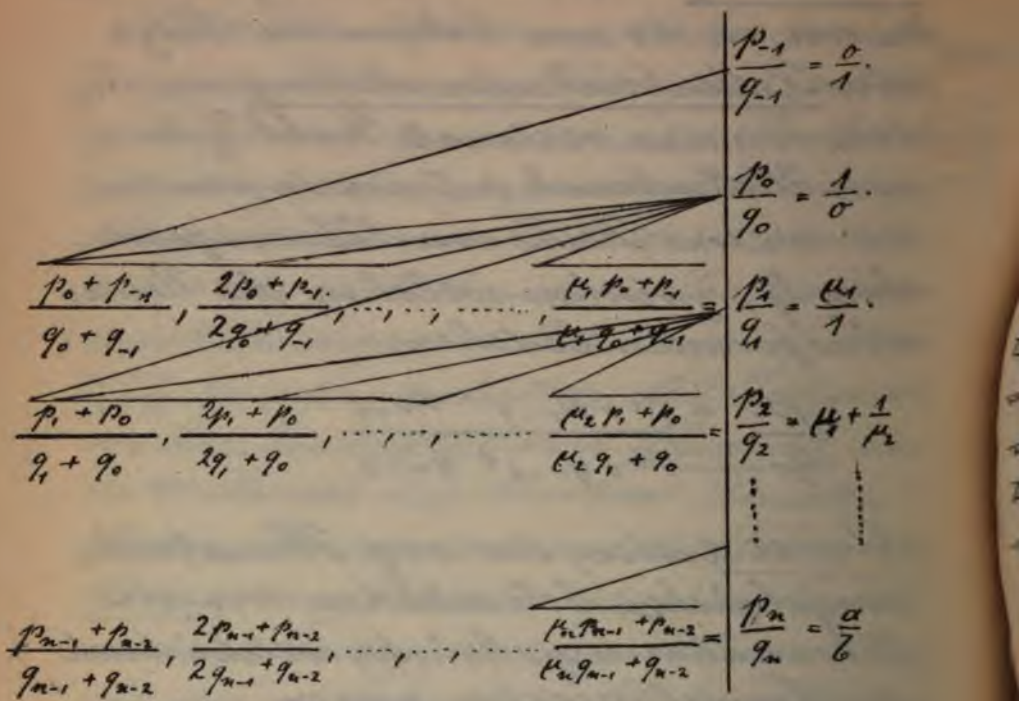
Ausser diesen, den sog. Hauptnäherungsbrüchen, betrachteten wir die Nebennäherungsbrüche, welche durch die Formel gegeben waren

$$\frac{\varsigma p_{r-1} + p_{r-2}}{\varsigma q_{r-1} + q_{r-2}} \qquad \varsigma = 1, 2, \ldots (a_r - 1).$$

Die Reihe der Näherungsbrüche begann mit den fingirten Brüchen

$$\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{0}{1}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{0} .$$

Die Gesamtheit dieser Brüche können wir in das folgende Schema anordnen.



Dabei berechnet sich jeder Näherungsbruch aus zwei anderen Näherungsbrüchen vermöge der oben angegebenen Recursionsformeln in der Weise, dass Zähler und Nenner jenes gleich der Summe in Zähler und Nenner dieser wird. Drei in solcher Weise zusammengehörige Brüche

sind in unserem Schema durch Verbindungslinien gekennzeichnet; sie erscheinen hier als Ecken eines Dreiecks. Andrerseits schreiten wir bei der Construction der rationalen Punkte auf der Kreisperipherie von einem Dreieck zu einem nächsten fort, wobei die Ecken eines jeden dieser Dreiecke ebenfalls nach dem gerade genannten Gesetze zusammengehören. Die sämtlichen Dreiecke unseres Schemas sind daher im Sinne unserer Construction „Farey'sche Dreiecke" und die sämtlichen Zahlen unseres Schemas bezeichnen Punkte der Kreisperipherie, welche für unsere Construction erreichbar sind. Insbesondere ist $\frac{a}{c}$ ein solcher Punkt. Nun ist aber $\frac{a}{c}$ eine ganz beliebige rationale Zahl, weil doch eine beliebige rationale Zahl in einen Kettenbruch entwickelt werden kann. Mithin ist jeder in w rationale Punkt der Kreisperipherie für unsere Construction erreichbar. Hiermit ist

der erste Teil unserer obigen Aussage bewiesen. Es hat sich nebenbei die interessante Thatsache ergeben, daß die Reihe der Hülfspunkte, welche wir bei unserer Construction berühren müssen, um zu dem vorgelegten rationalen Werte von w zu gelangen, übereinstimmt mit den Näherungsbrüchen in der Kettenbruchentwickelung dieses Wertes.

Die in unserem Schema verlaufenden Verbindungslinien deuten noch eine andere Eigenschaft der Näherungsbrüche, nämlich den Determinantensatz der Kettenbruchentwickelung, an. Es haben nämlich je zwei Näherungsbrüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die Determinante $a\,d - b\,c = +1$, wenn $\frac{a}{b}$ an dem unteren, $\frac{c}{d}$ an dem oberen Ende einer Verbindungslinie steht. Umgekehrt wird jede Lösung c, d der Diophantischen Gleichung $a\,d - b\,c = 1$, in welcher wir uns a und b irgendwie teilerfremd gegeben denken, wie wir früher

zeigten durch einen Näherungsbruch der Kettenbruchentwickelung von $\frac{a}{c}$ geliefert. Die beiden Zahlen $\frac{a}{c}$ und $\frac{c}{d}$ erscheinen daher in unserem Schema als Endpunkte einer Verbindungslinie. Alle Verbindungslinien unseres Schemas ergeben aber bei der Construction am Kreise Dreiecksseiten. Daher muß jedes Zahlenpaar $\frac{a}{c}$ und $\frac{c}{d}$, welches der Diophantischen Gleichung $ad-bc=1$ genügt, in unserer Construction als Begrenzung einer Dreiecksseite auftreten. Hiermit ist auch der zweite Teil unserer obigen Behauptung erwiesen.

Wir führen noch im Anschluss an Hurwitz eine bequeme Bezeichnung ein. Wir nennen die Verbindungslinie zweier Punkte $\frac{a}{c}$ und $\frac{c}{d}$ der Kreisperipherie, wenn sie der Gleichung $ad-bc=+1$ genügen, eine Elementarsehne erster Art.

Das zuletzt Bewiesene können wir hiernach so ausdrücken: Die Gesamtheit der Elementarsehnen

erster Art des Kreises fällt mit der Gesamtheit der Dreiecksseiten bei unserer Construction zusammen. Wir bezeichnen ferner als Elementarsehne zweiter Art die Verbindungslinie zweier Punkte $\frac{a'}{c'}$ und $\frac{c}{d}$, des Kreises von der Determinante $a'd' - b'c'$. Es zeigt sich, daß die Hilfsgeraden unserer Construction solche Elementarsehnen zweiter Art sind, und daß wieder die Gesamtheit der Elementarsehnen zweiter Art mit der Gesamtheit der Hülfsgeraden zusammen fällt.

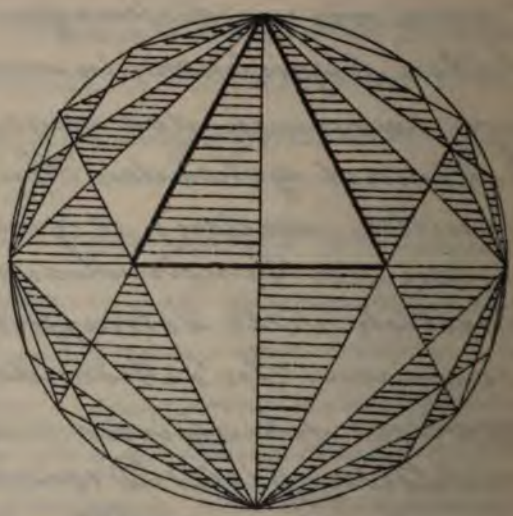
Fr. 17. I. 96. Wir bringen heute an unserer bisherigen Figur noch einen scheinbar äusserlichen Zusatz an; wir werden dadurch erreichen, dass uns dieselbe ausser der Scala der rationalen Punkte auch die Einteilung des Kreisinneren in eine unendliche Anzahl unter sich aequivalenter Parzellen zur Erscheinung bringt.

Wir bemerken nämlich, dass jedes unserer Constructionsdreiecke durch

die Hülfsgeraden in 6 Unterdreiecke ge-
teilt wird. Diese Unterdreiecke wollen wir
abwechselnd schraffiren, so dass sich
jedes schraffirte Dreieck mit seinen
3 Seiten an 3 nichtschraffirte Dreiecke
anlegt und umgekehrt. Es stossen
dann in den „Mittelpunkten" der
Constructionsdreiecke je 3 schraffirte
Dreiecke zusammen, in den „Mittel-
punkten" der Seiten jener Dreiecke
(wenn wir so diejenigen Punkte jener
Seiten bezeichnen, in welchen dieselben
von den durch den gegenüberliegenden
Eckpunct gehenden Hülfsgeraden ge-
schnitten werden) je zwei und in den
Ecken der Constructionsdreiecke je un-
endlich viele schraffirte Dreiecke zu-
sammen. In's Besondere liefern ein
gewisses schraffirtes und ein gewisses
nichtschraffirtes Dreieck zusammen
gerade das pg. 184 abgegrenzte redu-
cirte Gebiet, vergl. überall die Figur
der folgenden Seite.

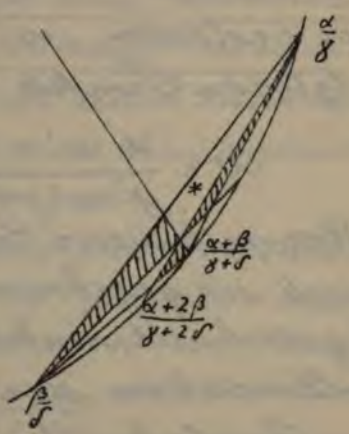
Es ist nun möglich, jedes schraffirte
bez. nicht schraffirte Dreieck unserer

Figur durch eine und nur durch eine Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ in den schraffirten bez. nichtschraffirten Teil des reducirten Raumes zu transformiren. Und umgekehrt gibt es zu jeder solchen Substitution ein und auch nur ein schraffirtes und nicht schraffirtes Dreieck unserer Figur, welches durch jene Substitution in den reducirten Raum verlegt wird.



Zum Beweise greifen wir irgend ein Dreieck unserer Figur heraus. Dasselbe ist ein Unterbestandteil eines der Constructionsdreiecke, eine Seite desselben fällt in eine Seite dieses Dreiecks, also in eine Elementarsehne erster Art, während seine beiden anderen Seiten

Rücke von Hülfsgeraden, also von Elemen-
tarsehnen zweiter Art sind. Es handle sich
etwa um das mit einem * versehene nicht
schraffirte Dreieck. (vergl. die f. Figur).
Die Endpunkte der zum Dreiecke gehö-
rigen Elementarsehne erster Art seien
$\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$. Die Endpunkte der beiden
Elementarsehnen zweiter Art sind
dann: $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\alpha+2\beta}{\beta+2\delta}$ bez. $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$ und
$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$. Andererseits ist der nichtschraf-
firte Teil des
reducirten Rau-
mes von der Ele-
mentarsehne er-
ster Art ∞, 0 und
den Elementar-
sehnen zweiter
Art ∞, $\frac{1}{2}$ und
1, -1 begrenzt.
Wir betrachten
daher die fol-
genden Punktepaare samt den sie ver-
bindenden Geraden:



einer seits $\begin{cases} \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\alpha+2\beta}{\gamma+2\delta}, \\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}, \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} \end{cases}$ andere seits $\begin{cases} \infty, 0 \\ \infty, \frac{1}{2} \\ +1, -1 \end{cases}$

Wir können nun unmittelbar eine lineare Transformation angeben, welche die Punkte der ersten Serie in die daneben stehenden Punkte der zweiten Serie überführt. Wir haben nämlich, wenn w irgend einen der ersteren, w' irgend einen der letzteren Punkte bedeutet.

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}.$$

Aber mit dieser Substitution, resp. der durch sie gegebenen Vertauschung der Kegelschnittpunkte ist nach pg. 183 eine Collineation der ganzen Ebene, die den Kegelschnitt in sich überführt, notwendig verbunden, nämlich die Collineation

$$\begin{aligned} \varrho a' &= \alpha^2 . a + \alpha\gamma . b + \gamma^2 . c , \\ \varrho b' &= 2\alpha\beta . a + (\alpha\delta + \beta\gamma) . b + 2\gamma\delta . c , \\ \varrho c' &= \beta^2 . a + \beta\delta . b + \delta^2 . c . \end{aligned}$$

Diese führt die Verbindungslinie von $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ in die Verbindungslinie von ∞ und 0 etc., d. h. unser nicht-schraffirtes Dreieck in die nicht schraffirte Hälfte des reducirten Raumes über. Da aber jenes Dreieck ein ganz beliebiges Dreieck unserer Construction darstellt, so erhalten wir das Resultat: dass jedes beliebige (schraffirte oder nicht-schraffirte) Dreieck in das (schraffirte oder nicht-schraffirte) Dreieck des reducirten Raumes durch eine Collineation unserer Gruppe verwandelt werden kann. Diese Collineation ist auch eindeutig bestimmt, wie aus den hingeschriebenen Formeln hervorgeht.

Andererseits wird jede Collineation unserer Gruppe, bez. jede w-Substitution

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$$

ein Dreieck unserer Eintheilung in das entsprechende Dreieck des reducirten Gebietes (nach dem Schema von pg 210 oben) überführen. Es werden

also auch alle Substitutionen der Gruppe dadurch erschöpft, dass wir verlangen, alle Dreiecke der Figur in das reducirte Gebiet zu verlegen.

Wenden wir umgekehrt auf das reducirte Gebiet die Gesamtheit unserer Collineationen an, so müssen wir die Gesamtheit unserer Dreiecke erhalten. Durch diese Bemerkungen ist die Berechtigung der Benennung: reducirtes Gebiet: auf's neue dargethan. Wir erkennen nämlich:

Es ist jeder Punkt des Kegelschnittinnern einem bestimmten Punkte des reducirten Gebietes aequivalent und umgekehrt sind keine zwei Punkte des reducirten Gebietes unter sich aequivalent. Die Punkte des reducirten Dreiecks stellen also alle reducirten Formen mit $D' < 0$ und jede nur einmal vor. Dieselbe Aussage können wir auch so formuliren. Das reducirte Gebiet bildet für das Kegelschnittinnere einen Fundamentalbereich der Gruppe unserer $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ Substi-

tutionen.

Die letzten Aussagen verlangen, wenn sie vollständig richtig sein sollen, noch eine schärfere Abgrenzung des reducirten Gebietes. Wir bemerken nämlich, dass unser reducirtes Gebiet, wie wir es bisher definirt haben, d. h. das Dreieck ∞, E, E' schlechthin, gewisse Punkte, nämlich die Randpunkte enthält, welche unter sich aequivalent sind. Es entspricht dies bei unserer vorhergehenden Deduction dem Umstande, dass wir diese Randpunkte entweder dem reducirten Bereiche selbst oder einem seiner Nachbarbereiche zurechnen können. Wir betrachten die projective Beziehung $w' = w + 1$ der Kreisperipherie in sich, dieselbe führt die Punkte $\infty, -\frac{1}{2}$ des Kreises in die Punkte $\infty, +\frac{1}{2}$ über. Die

Die zugehörige Collineation der Ebene bringt also die Seite ∞E unseres Dreiecks in die Seite $\infty E'$. Die Substitution

$w' = w - 1$ bewirkt das Umgekehrte. Wir betrachten ferner die Substitution $w' = -\frac{1}{w}$, welche gleichfalls eine $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ Substitution ist. Dieselbe macht aus den Punkten $-1, +1$ des Kreises die Punkte $+1, -1$; sie führt also die Seite EE' unseres Dreiecks in sich über u. zw. in der Weise, dass die eine Hälfte $F\,E$ derselben in die andere Hälfte $F\,E'$ übergeht und umgekehrt. Die Randpunkte des Dreiecks sind also paarweise durch gewisse $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ Collineationen einander zugeordnet, sie sind paarweise aequivalent.

Wir deuten dieses in der Figur durch die Doppelpfeile an. Soll unser reduciertes Dreieck im präcisen Sinne des Wortes ein Fundamentalraum sein, d. h. soll es nur nicht-aequivalente Punkte enthalten, so dürfen wir demselben nur den einen Teil des Randes, etwa den zum schraffierten Dreieck gehörigen Rand hinzurechnen, während wir den anderen Teil des Randes den Nachbardreiecken zuweisen. Nach dieser Verschärfung ist jetzt der Satz ausnahmslos richtig:

dass jeder Punkt des Kreisinnern einen und nur einen aequivalenten Punkt im Fundamentalraum besitzt.

Wir werden dieselbe Verschärfung auch an der arithmetischen Definition der reducirten Formen anzubringen haben. Wir nannten eine definite Form (a, b, c) dann reducirt, wenn $|b| \leqq a \leqq c$ war. Dem Auftreten der Gleichheitszeichen in dieser Formel entspricht geometrisch, dass der bez. Punkt a, b, c auf den Rand des Fundamentalraumes rückt; er befindet sich, wenn $a = c$, auf der Geraden EE', wenn $|b| = a$ auf den Geraden ∞E oder $\infty E'$. Wenn wir also geometrisch dem reducirten Gebiete einen Teil seiner Randpunkte wegnahmen, so werden wir arithmetisch die Gültigkeit des Gleichheitszeichens unter Umständen ausschliessen müssen. Nun ist, bei unserer Annahme über die Lage des Einheitspunktes in dem beibehaltenen Teile des Randes $b > 0$, in dem fortgelassenen $b < 0$. Dementsprechend werden wir die Gleichheitszeichen in

der obigen Formel nur im Falle $b > 0$ bestehen lassen und werden jetzt die folgende schärfere Definition der reducirten Formen aufstellen: Eine Form (a, b, c) ist im Falle $b > 0$ eine reducirte Form, wenn $b \leqq a \leqq c$, im Falle $b < 0$ aber dann, wenn $|b| < a < c$ ist. Nach dieser Verbesserung unserer ursprünglichen Definition können wir den Satz (welcher übrigens nur ein anderer Ausdruck für einen Satz der vorigen Seite ist) als ausnahmslos richtig aussprechen: daß in jeder Klasse aequivalenter definiter Formen immer nur eine reducirte Form enthalten ist.

Wir kommen noch auf die Frage nach den Automorphien der definiten Formen zurück, weil uns die hierbei in Betracht kommenden Verhältnisse aus unserer Figur unmittelbar entgegentreten. Wie wir wissen, hängt das Vorhandensein der Automorphien von den Lösungen t und u der Pell'schen Gleichung

$$t^2 + \Delta u^2 = 4$$

ab, wo $-\Delta = D$ die Discriminante der

vorgelegten Form ist. Die Automorphie selbst ist dann eine Substitution

$$x = \alpha X + \beta Y$$

$$y = \gamma X + \delta Y$$

mit folgendem Coefficientenschema:

$$\begin{vmatrix} \frac{t - bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t + bu}{2} \end{vmatrix}$$

Haben wir eine Discriminante $\Delta > 4$, so besitzt die Pell'sche Gleichung ersichtlich nur die trivialen Lösungen: $t = \pm 2$, $u = 0$, welche zu den Automorphien Anlass geben $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{vmatrix}$. Die Form geht also bei $\Delta > 4$ nur dann in sich über, wenn wir x und y entweder ungeändert lassen oder beide gleichzeitig im Vorzeichen vertauschen. Ist dagegen $\Delta = 4$, so giebt es ein zweites Lösungspaar der Pell'schen Gleichung, nämlich $t = 0$, $u = \pm 1$, und dementsprechend zwei weitere Automorphien. Ist endlich $\Delta = 3$, so liefert jede der vier Vorzeichencombinationen in $t = \pm 1$, $u = \pm 1$

eine Lösung der Pell'schen Gleichung. Zu den obigen Automorphien, die dem Lösungspaare $t = \pm 2$, $u = 0$ entsprechen, treten in diesem Falle noch 4 neue Automorphien hinzu. In den beiden letztgenannten Fällen $\Delta = 4$ und $\Delta = 3$ giebt es je nur eine Formenklasse, weil es nur eine reducirte Form giebt. Es ist dieses bez. die Form

$$X^2 + y^2 \text{ und } X^2 + Xy + y^2.$$

Wir sehen nun zu, wie sich das Vorhandensein der Automorphien in unserer Figur darstellt. Zu dem Zwecke müssen wir von der Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ der Variabeln x und y zu der entsprechenden Substitution der Variabeln a, b, c übergehen. Die Substitution $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist natürlich in jenen, wie in diesen Variabeln die identische Substitution. Ferner bedeutet die Substitution $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in den Variabeln a, b, c gleichfalls die Identität, wie aus den Formeln von pag. 178 sofort einleuchtet. Daher kömt das Vorhandensein dieser zweiten

Automorphie in unserer Figur nicht zum Ausdrucke. Überhaupt ändert das gleichzeitige Umkehren der Vorzeichen in den Coefficienten der Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ an der Collineation der Variabeln a, b, c durchaus nichts. Daher werden die 4 Automorphien im Falle $\Delta = 4$ und die 6 im Falle $\Delta = 3$ nur 2 bez. 3 verschiedene Collineationen in der Ebene der a, b, c ergeben können. Dass nun in der That 2 bez. 3 Collineationen vorhanden sind, bei denen die Form $X^2 + y^2$ bez. $X^2 + Xy + y^2$ ungeändert bleibt, ersieht man aus unserer Figur. Die Form $X^2 + y^2$ wird nämlich durch den Punkt 1, 0, 1 repräsentirt, den wir in der Figur von pg. 213 mit F bezeichnet haben, die Form $X^2 + Xy + y^2$ wird durch den Einheitspunkt E mit den Coordinaten 1, 1, 1 dargestellt. Im Punkte F stossen 2, im Punkte E 3 schraffirte (und ebensoviele nicht schraffirte) Dreiecke zusammen. Die Collineationen, durch welche diese 2 bez. 3 schraffirten Dreiecke in das

eine Lösung der Pell'schen Gleichung. Zu den obigen Automorphien, die dem Lösungspaare $t = \pm 2$, $u = 0$ entsprechen, treten in diesem Falle noch 4 neue Automorphien hinzu. In den beiden letztgenannten Fällen $\Delta = 4$ und $\Delta = 3$ giebt es je nur eine Formenklasse, weil es nur eine reducirte Form giebt. Es ist dieses bez. die Form

$$X^2 + y^2 \quad \text{und} \quad X^2 + Xy + y^2.$$

Wir sehen nun zu, wie sich das Vorhandensein der Automorphien in unserer Figur darstellt. Zu dem Zwecke müssen wir von der Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ der Variabeln x und y zu der entsprechenden Substitution der Variabeln a, b, c übergehen. Die Substitution $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist natürlich in jenen, wie in diesen Variabeln die identische Substitution. Ferner bedeutet die Substitution $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in den Variabeln a, b, c gleichfalls die Identität, wie aus den Formeln von pg. 178 sofort einleuchtet. Daher kommt das Vorhandensein dieser zweiten

tomorphie in unserer Figur nicht
m Ausdrucke. Überhaupt ändert das
eichzeitige Umkehren der Vorzeichen
den Coefficienten der Substitution
$\beta\gamma$) an der Collineation der Variabeln
b, c durchaus nichts. Daher werden
e 4 Automorphien im Falle $\Delta = 4$ und
e 6 im Falle $\Delta = 3$ nur 2 bez. 3 verschie
ne Collineationen in der Ebene der
, b, c ergeben können. Dass nun in der
hat 2 bez. 3 Collineationen vorhanden
ind, bei denen die Form $x^2 + y^2$ bez.
$^2 + xy + y^2$ ungeändert bleibt, er
ieht man aus unserer Figur. Die
orm $x^2 + y^2$ wird nämlich durch
n Punkt 1, 0, 1 repräsentirt, den
ir in der Figur von pg. 213 mit F
ezeichnet haben, die Form $x^2 + xy + y^2$
ird durch den Einheitspunkt E mit
en Coordinaten 1, 1, 1 dargestellt.
n Punkte F stossen 2, im Punkte
schraffirte (und ebensoviele nicht
hraffirte) Dreiecke zusammen. Die
ollineationen, durch welche diese
bez. 3 schraffirten Dreiecke in das

eine Lösung der Pell'schen Gleichung. Zu den obigen Automorphien, die dem Lösungspaare $t = \pm 2$, $u = 0$ entsprechen, treten in diesem Falle noch 4 neue Automorphien hinzu. In den beiden letztgenannten Fällen $\Delta = 4$ und $\Delta = 3$ giebt es je nur eine Formenklasse, weil es nur eine reducirte Form giebt. Es ist dieses bez. die Form

$$X^2 + y^2 \quad \text{und} \quad X^2 + Xy + y^2.$$

Wir sehen nun zu, wie sich das Vorhandensein der Automorphien in unserer Figur darstellt. Zu dem Zwecke müssen wir von der Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ der Variabeln x und y zu der entsprechenden Substitution der Variabeln a, b, c übergehen. Die Substitution $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist natürlich in jenen, wie in diesen Variabeln die identische Substitution. Ferner bedeutet die Substitution $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in den Variabeln a, b, c gleichfalls die Identität, wie aus den Formeln von pg. 178 sofort einleuchtet. Daher kommt das Vorhandensein dieser zweiten

utomorphie in unserer Figur nicht
um Ausdrucke. Überhaupt ändert das
leichzeitige Umkehren der Vorzeichen
den Coefficienten der Substitution
β) an der Collineation der Variabeln
b, c durchaus nichts. Daher werden
ie 4 Automorphien im Falle $\Delta = 4$ und
ie 6 im Falle $\Delta = 3$ nur 2 bez. 3 verschie
ne Collineationen in der Ebene der
, b, c ergeben können. Dass nun in der
hat 2 bez. 3 Collineationen vorhanden
ind, bei denen die Form $X^2 + y^2$ bez.
$^2 + Xy + y^2$ ungeändert bleibt, er
ieht man aus unserer Figur. Die
orm $X^2 + y^2$ wird nämlich durch
en Punkt 1, 0, 1 repräsentirt, den
ir in der Figur von pg. 213 mit F
ezeichnet haben, die Form $X^2 + Xy + y^2$
ird durch den Einheitspunkt E mit
en Coordinaten 1, 1, 1 dargestellt.
n Punkte F stossen 2, im Punkte
3 schraffirte (und ebensoviele nicht
hraffirte) Dreiecke zusammen. Die
ollineationen, durch welche diese
bez. 3 schraffirten Dreiecke in das

schraffirte Dreieck des reducirten Raumes verwandelt werden, sind die Automorphien der Form $x^2 + y^2$ bez. $x^2 + xy + y^2$. Das Vorhandensein und die Bedeutung der Automorphien im Falle $\Delta = 4$ und $\Delta = 3$ leuchtet also aus der Anordnung unserer Dreiecksfigur direct ein. Ebenso erkennen wir aus der Figur, dass es keine anderen Classen definiter Formen mit aussergewöhnlichen Automorphien giebt als die genannten beiden.

Do. d. 23. I. Wir ziehen jetzt auch Substitutionen

$$w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$$

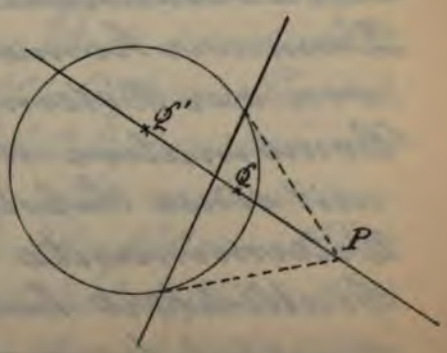
von der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ hinzu. Auch diese haben in unserer Figur eine einfache Bedeutung. Wir betrachten zunächst die specielle Substitution

$$w' = -w,$$

welche ersichtlich die Determinante -1 besitzt. Die zugehörige Collineation der a, b, c lautet nach pg. 210:

$\varsigma a' = a, \varsigma b' = -b, \varsigma c' = c$

und bedeutet eine gewöhnliche Spiegelung an der Mittellinie unserer Figur, eine Vertauschung von rechts und links. Das Wort Spiegelung werden wir im Folgenden jedoch in einem allgemeineren Sinne gebrauchen. Handelt es sich nicht, wie soeben um einen Durchmesser des Kreises sondern um eine beliebige Sehne desselben, so verstehen wir unter Spiegelung eine Operation, welche man in der projectiven Geometrie als harmonische Perspective bezeichnet. Dieselbe wird folgendermassen definirt: Man construire den Pol P der Sehne und ordne jedem Punkte A der Ebene denjenigen Punkt A' der Verbindungslinie P'A zu, welcher mit A harmonisch liegt in Bezug auf den Pol P und den Schnittpunkt von



P'A mit der Polaren von P'. Der Pol P bildet das „Centrum" unsere Sehne die „Axe" dieser Perspective. Diese Operation stellt die projective Verallgemeinerung der gewöhnlichen Spiegelung dar und geht in jene über, wenn wir die Sehne speziell in einen Durchmesser des Kreises rücken lassen.

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der Substitutionen von der Determinante ± 1. Dieselben bilden eine Gruppe, welche wir im Gegensatz zu der früheren die <u>erweiterte Gruppe</u> nennen. Wir erhalten übrigens diese ganze Gruppe, wenn wir zu der früheren Gruppe von Substitutionen mit der Determinante $+1$ noch die spezielle Substitution $w' = -w$ von der Determinante -1 hinzunehmen. Denn wir können jede Substitution von der Determinante -1 durch Combination dieser speciellen mit einer Substitution von der Determinante $+1$ darstellen. (Der Deutlichkeit halber sei noch ausdrücklich hervorgehoben, dass die

zugehörigen Substitutionen der a, b, c auch jetzt die Determinante +1 haben, denn sie ist gleich $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$.)

Der Fundamentalbereich dieser erweiterten Gruppe besteht aus einem einzelnen schraffirten (oder nicht-schraffirten) Dreieck, etwa aus dem schraffirten Dreieck des reducirten Raumes, in demselben Sinne, wie bei unserer früheren Gruppe der Fundamentalbereich von dem Doppeldreiecke des reducirten Raumes gebildet wurde. In der That zeigt sich, dass jeder Punkt des Kreisinnern durch eine Operation unserer Gruppe in das schraffirte Dreieck des reducirten Raumes verlegt werden kann, und dass keine zwei Punkte des schraffirten Dreiecks unter sich aequivalent sind. Man kann nämlich erstlich jeden Punkt durch eine $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ Substitution von der Determinante +1 in den reducirten Raum überhaupt überführen. Fällt er dabei in das nichtschraffirte Dreieck, so bringt man ihn durch die

Operation $w' = -w$ in das schraffirte Dreieck hinein. Fällt er in das schraffirte Dreieck, so ist das Gewünschte ohne dies erreicht. Dass auch keine zwei Punkte des schraffirten Dreiecks untereinander sich aequivalent sein können, ergibt sich aus der Erzeugung der erweiterten Gruppe mittelst der Operationen von der Determinante +1 und der speciellen Operation $w' = -w$, deren Wirkung uns einzeln bekannt ist.

Die arithmetische Definition des neuen Fundamentalbereichs ist diese:

$$0 \leqq b \leqq a \leqq c$$

(wo überall die Gleichheitszeichen mitzählen).

Wir können jetzt die Construction unserer Figur nach einem neuen Princip beschreiben, indem wir die Operation der Spiegelung in dem oben festgestellten Sinne an die Spitze stellen. Wir gehen von dem schraffirten Dreieck des reducirten Raumes aus und bemerken, dass die 3 anliegenden nicht-schraffirten Dreiecke aus diesem durch

Spiegelung an der gemeinsamen Dreiecksseite entstehen. Bei zweien dieser Dreiecke ist das ohne weiteres klar, weil es sich bei ihnen um eine gewöhnliche Spiegelung handelt. Bei dem dritten Dreiecke, wo die Spiegelung als harmonische Perspective erklärt werden muß, folgt das Behauptete aus der Entstehung unserer Figur durch harmonische Construction. Wir betrachten sodann eines dieser drei nicht schraffirten Dreiecke und die ihm anliegenden drei schraffirten. Auch diese gehen wegen der fundamentalen Eigenschaften unserer Figur aus dem nicht-schraffirten durch Spiegelung an den gemeinsamen Dreiecksseiten hervor. Dasselbe gilt überhaupt für jedes Dreieck unserer Figur und die dasselbe umgebenden drei Nebendreiecke, weil die Spiegelung eine projective Operation ist und weil jedes Dreieck unserer Figur mit jedem anderen projectiv verwandt ist. Wir können daher die

ganze Figur dadurch successive entstehen lassen, dass wir jedes einzelne Elementardreieck, welches wir erhalten, immer auf's Neue an seinen Seiten spiegeln. Da alle Dreiecksseiten, zu denen wir so gelangen, Elementarsehnen sind, d. h. rationale Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ der Kreisperipherie verbinden, so werden alle unsere Spiegelungen ganzzahlige Substitutionen $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ u. zw. natürlich ganzzahlige Substitutionen von der Determinante -1. Speziell ist dabei $\alpha + \delta = 0$. Von hier aus bestätigt man sofort, dass jeder Punkt des Kegelschnittinneren mit jedem Punkte des schraffirten Elementardreiecks durch eine ganzzahlige Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ aequivalent ist, welche die Determinante $+1$ hat, wenn es sich um einen Punkt eines schraffirten Dreiecks, die Determinante -1, wenn es sich um einen Punkt eines nicht-schraffirten Dreiecks handelt. Die fragliche Substitution von der Determinante $+1$ oder -1 erhält man einfach durch zusammen-

setzung einer geraden oder ungeraden Anzahl von Einzelspiegelungen, durch welche man von dem Elementardreieck des reducirten Gebietes zu demjenigen Dreieck hingelangt, welchem der gerade betrachtete Punkt angehört.

Wir fragen auch bei dieser erweiterten Gruppe nach den Automorphien. Zu dem Ende denken wir uns zu einem Punkte a, b, c die Gesammtheit seiner im Sinne der erweiterten Gruppe aequivalenten Punkte, d. h. das System seiner Spiegelpunkte hinzu. (Man denke an die Anordnung der Spiegelbilder bei einem Kaleidoskop.) Eine Automorphie liegt dann und nur dann vor, wenn zwei Punkte dieses Systems zusammenrücken. Da aber je zwei Spiegelpunkte durch eine Dreiecksseite getrennt werden, findet dieses nur dann statt, wenn der Punkt a, b, c in einer Dreiecksseite gelegen ist. In diesem Falle bleibt

unser Pünkt bei zwei Operationen der erweiterten Gruppe ungeändert, nämlich bei der identischen Operation und bei der Spiegelung an der betr. Dreiecksseite. Ein spezieller Fall hiervon ist es, wenn der Pünkt in eine Dreiecksecke hineinrückt. Alsdann rücken aus dem System der aequivalenten Punkte 4, 6 oder gar unendlich viele Pünkte in dieselbe Ecke hinein, je nachdem es sich um eine Ecke handelt, welche mit den Pünkten, F, E oder ∞ des reducirten Gebietes (vergl pag 213.) aequivalent ist. Dementsprechend bleibt ein solcher Pünkt bei 4, 6 oder unendlich vielen Operationen der erweiterten Gruppe ungeändert.

Wollen wir die entsprechenden Resultate für quadratische Formen aussprechen, so müssen wir berücksichtigen, daß die Anzahl der Automorphien durch Hinzunahme der Substitution $x' = -x'$, $y = -y'$, welche auf unsere Figur keine

Wirkung ausübt, sich verdoppelt. Daraufhin formuliren wir die folgenden Sätze:

1. Eine beliebige binäre definite Form geht durch zwei Automorphien der erweiterten Gruppe in sich über, nämlich durch die identische Substitution und durch die Operation $x = -x', y = -y'$!

2. Wenn der repräsentirende Punkt in einer Elementarsehne unserer Figur liegt, so bleibt die Form bei 4 Operationen ungeändert.

3. Wenn der repräsentirende Punkt in eine Dreiecksecke rückt, so wird die Form durch 8 oder durch 12 oder auch durch unendlich viele Operationen der erweiterten Gruppe in sich transformirt.

Wir stellen noch die arithmetischen Kriterien für das Vorhandensein aussergewöhnlicher Automorphien zusammen, wobei wir jedoch nur von der Formenclasse sprechen und diese durch ihre reducirte Form repräsentiren. Hinsichtlich des Satzes 2) haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der reducirte Re-

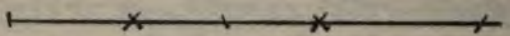
präsentant der Klasse einer Elementar-
sehne erster oder zweiter Art angehört.
Im ersten Falle ist

$$b = 0,$$

im zweiten

$$b = a \quad \text{oder} \quad a = c.$$

Der zweite Fall zerlegt sich hiernach
noch in zwei Unterarten a) und b).
Um dieselben in algemeingültiger
Weise von einander zu sondern, bemer-
ke man, dass jede Elementarsehne
zweiter Art zwei Dreiecksecken E
trägt,



welche dieselbe in ein inneres und zwei
äussere Stücke zerlegt. Im Falle a) liegt
der reducirte Punkt auf einem äusseren,
im Falle b) auf einem inneren Stücke
der Elementarsehne zweiter Art. Die Aus-
sagen des Satzes 3) greifen Platz, wenn
der repräsentirende Punkt in eine Ecke
unserer Dreiecksteilung hineinrücket.
Lassen wir die auf der Peripherie ge-
legenen Ecken ausser Acht, weil wir
doch von definiten Formen sprechen

und diese im Innern des Kreises ihre Darstellung finden, so haben wir wiederum zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle ist die reducirte Form characterisirt durch

$$b = 0,\ a = c$$ (d. h. den Punkt F)

im zweiten Falle durch

$$a = b = c$$ (den Punkt E).

Auch die arithmetische Theorie der quadratischen Formen beschäftigt sich mit den soeben aufgezählten Ausnahmeformen. Sie werden dort <u>Anceps-Formen</u> oder auch <u>Ambige Formen</u> genannt. In unserem Sinne bedeutet das Wort Anceps eben dieses, daß der die Anceps-Form repräsentirende Punkt zwei Fundamentalbereichen zugerechnet werden kann.

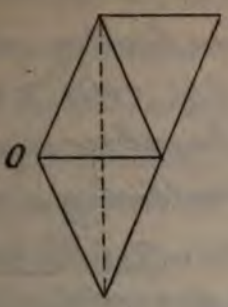
Da die Anceps-Formen für die spätere Theorie von besonderer Wichtigkeit sind, wollen wir ihre Eigenart noch durch die zugehörigen Gitter charakterisiren, wie bereits kurz vor Weihnachten begonnen wurde.

Entsprechend der allgemeinen Construction der Gitter, wonach bei definiten Formen die Seiten des Elementarparallelogrammes Va und Vc, der Winkel zwischen diesen $\gamma = \arccos \frac{b}{2Vac}$ betragen sollte, sind die Anceps-Klassen der ersten Art (mit dem Repräsentanten $b = 0$) dadurch characterisirt, dass sie ein <u>Rechteckiges Punktgitter</u> besitzen. Wir können nämlich ihr Gitter, indem wir eine geeignete Form, eben die reducirte Form mit $b = 0$, also $\gamma = 90°$ der Klasse, herausgreifen, aus einzelnen Rechtecken aufbauen.

Ferner sind die Anceps-Klassen der zweiten Art dadurch ausgezeichnet, dass ihr Punktgitter durch ein System von <u>Rhomben</u> erzeugt werden kann.

Liegt nämlich die erste Unterart mit dem Repräsentanten $a = c$ vor, so liefert die reducirte Form der Klasse direkt ein Parallelgitter mit

rhombischen Elementarparallelogrammen.



Liegt die zweite Unterart vor ($a = b$), so ist für die reducirte Form $\gamma c . \cos \gamma = \frac{\gamma a}{2}$, so dass die eine Hälfte des Elementarparallelogramms ein gleichschenkliges Dreieck wird. Man stellt dann durch eine Umordnung der Gitterstäbe, wie aus der nebenstehenden Figur ersichtlich ist, aus dem Parallelgitter der reducirten Form wiederum ein rhombisches Gitter her. Diese beiden Unterarten können noch durch den bei O gelegenen Winkel der Rhomben unterschieden werden. Im ersten Falle ($a = c$) besteht nach der Definition unseres a, b, c-Coordinatensystems für die Coefficienten der reducirten Form die Ungleichung $b < a$. Daher haben wir in dem rhombischen Gitter der reducirten Form $\cos \gamma = \frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$ oder $\gamma > 60°$. Im zweiten Falle ($a = b$) gilt für die Coefficienten der reducirten Form die Unglei-

Operation $w' = -w$ in das schraffirte Dreieck hinein. Fällt er in das schraffirte Dreieck, so ist das Gewünschte ohne dies erreicht. Dass auch keine zwei Punkte des schraffirten Dreiecks untereinander aequivalent sein können, ergibt sich aus der Erzeugung der erweiterten Gruppe mittelst der Operationen von der Determinante +1 und der speciellen Operation $w' = -w$, deren Wirkung uns einzeln bekannt ist.

Die arithmetische Definition des neuen Fundamentalbereichs ist diese:

$$0 \leqq b \leqq a \leqq c$$

(wo überall die Gleichheitszeichen mitzählen).

Wir können jetzt die Construction unserer Figur nach einem neuen Princip beschreiben, indem wir die Operation der Spiegelung in dem oben festgestellten Sinne an die Spitze stellen. Wir gehen von dem schraffirten Dreieck des reducirten Raumes aus und bemerken, dass die 3 anliegenden nicht-schraffirten Dreiecke aus diesem durch

Spiegelung an der gemeinsamen Drei-
eckseite entstehen. Bei zweien dieser
Dreiecke ist das ohne weiteres klar,
weil es sich bei ihnen um eine ge-
wöhnliche Spiegelung handelt. Bei
dem dritten Dreiecke, wo die Spiege-
lung als harmonische Perspective
erklärt werden muß, folgt das Be-
hauptete aus der Entstehung unse-
rer Figur durch harmonische Con-
struction. Wir betrachten sodann ei-
nes dieser drei nicht schraffirten
Dreiecke und die ihm anliegenden
drei schraffirten. Auch diese gehen
wegen der fundamentalen Eigenschaf-
ten unserer Figur aus dem nicht-schraf-
firten durch Spiegelung an den gemein-
samen Dreieckseiten hervor. Dasselbe
gilt überhaupt für jedes Dreieck unse-
rer Figur und die dasselbe umgeben-
den drei Nebendreiecke, weil die Spie-
gelung eine projective Operation ist
und weil jedes Dreieck unserer Fi-
gur mit jedem anderen projectiv ver-
wandt ist. Wir können daher die

ganze Figur dadurch successive entstehen lassen, dass wir jedes einzelne Elementardreieck, welches wir erhalten, immer auf's Neue an seinen Seiten spiegeln. Da alle Dreiecksseiten, zu denen wir so gelangen, Elementarsehnen sind, d. h. rationale Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ der Kreisperipherie verbinden, so werden alle unsere Spiegelungen ganzzahlige Substitutionen $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ u. zw. natürlich ganzzahlige Substitutionen von der Determinante -1. Speziell ist dabei $\alpha + \delta = 0$. Von hier aus bestätigt man sofort, dass jeder Punkt des Kegelschnittinneren mit jedem Punkte des schraffirten Elementardreiecks durch eine ganzzahlige Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ aequivalent ist, welche die Determinante $+1$ hat, wenn es sich um einen Punkt eines schraffirten Dreiecks, die Determinante -1, wenn es sich um einen Punkt eines nicht-schraffirten Dreiecks handelt. Die fragliche Substitution von der Determinante $+1$ oder -1 erhält man einfach durch zusammen-

setzung einer geraden oder ungeraden Anzahl von Einzelspiegelungen, durch welche man von dem Elementardreieck des reducirten Gebietes zu demjenigen Dreieck hingelangt, welchem der gerade betrachtete Punkt angehört.

Wir fragen auch bei dieser erweiterten Gruppe nach den Automorphien. Zu dem Ende denken wir uns zu einem Punkte a, b, c die Gesammtheit seiner im Sinne der erweiterten Gruppe aequivalenten Punkte, d. h. das System seiner Spiegelpunkte hinzu. (Man denke an die Anordnung der Spiegelbilder bei einem Kaleidoskop.) Eine Automorphie liegt dann und nur dann vor, wenn zwei Punkte dieses Systems zusammenrücken. Da aber je zwei Spiegelpunkte durch eine Dreieckseite getrennt werden, findet dies es nur dann statt, wenn der Punkt a, b, c in einer Dreiecksseite gelegen ist. In diesem Falle bleibt

unser Pünkt bei zwei Operationen der erweiterten Gruppe ungeändert, nämlich bei der identischen Operation und bei der Spiegelung an der betr. Dreiecksseite. Ein spezieller Fall hiervon ist es, wenn der Pünkt in eine Dreiecksecke hineinrückt. Alsdann rücken aus dem System der aequivalenten Punkte 4, 6 oder gar unendlich viele Pünkte in dieselbe Ecke hinein, je nachdem es sich um eine Ecke handelt, welche mit den Pünkten, F, E oder ∞ des reducirten Gebietes (vergl pag 213) aequivalent ist. Dementsprechend bleibt ein solcher Pünkt bei 4, 6 oder unendlich vielen Operationen der erweiterten Gruppe ungeändert.

Wollen wir die entsprechenden Resultate für quadratische Formen aussprechen, so müssen wir berücksichtigen, daß die Anzahl der Automorphien durch Hinzunahme der Substitution $x' = -x'$, $y = -y'$, welche auf unsere Figur keine

Wirkung ausübt, sich verdoppelt. Daraufhin formuliren wir die folgenden Sätze:

1. Eine beliebige binäre definite Form geht durch zwei Automorphien der erweiterten Gruppe in sich über, nämlich durch die identische Substitution und durch die Operation $x = -x', y = -y'$!

2. Wenn der repräsentirende Punkt in einer Elementarsehne unserer Figur liegt, so bleibt die Form bei 4 Operationen ungeändert.

3. Wenn der repräsentirende Punkt in eine Dreiecksecke rückt, so wird die Form durch 8 oder durch 12 oder auch durch unendlich viele Operationen der erweiterten Gruppe in sich transformirt.

Wir stellen noch die arithmetischen Kriterien für das Vorhandensein aussergewöhnlicher Automorphien zusammen, wobei wir jedoch nur von der Formenclasse sprechen und diese durch ihre reducirte Form repräsentiren. Hinsichtlich des Satzes 2) haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der reducirte Re-

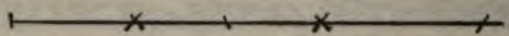
präsentant der Klasse einer Elementar-
sehne erster oder zweiter Art angehört.
Im ersten Falle ist

$$b = 0,$$

im zweiten

$$b = a \quad \text{oder} \quad a = c.$$

Der zweite Fall zerlegt sich hiernach
noch in zwei Unterarten a) und b).
Um dieselben in algemeingültiger
Weise von einander zu sondern, bemer-
ke man, dass jede Elementarsehne
zweiter Art zwei Dreiecksecken E
trägt,



welche dieselbe in ein inneres und zwei
äussere Stücke zerlegt. Im Falle a) liegt
der reducirte Punkt auf einem äusseren,
im Falle b) auf einem inneren Stücke
der Elementarsehne zweiter Art. Die Aus-
sagen des Satzes 3) greifen Platz, wenn
der repräsentirende Punkt in eine Ecke
unserer Dreiecksteilung hineinrücket.
Lassen wir die auf der Peripherie ge-
legenen Ecken ausser Acht, weil wir
doch von definiten Formen sprechen

und diese im Innern des Kreises ihre Darstellung finden, so haben wir wiederum zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle ist die reducirte Form characterisirt durch

$$b = 0,\ a = c$$ (d. h. den Punkt F)

im zweiten Falle durch

$$a = b = c$$ (den Punkt E).

Auch die arithmetische Theorie der quadratischen Formen beschäftigt sich mit den soeben aufgezählten Ausnahmeformen. Sie werden dort <u>Anceps-Formen</u> oder auch <u>Ambige Formen</u> genannt. In unserem Sinne bedeutet das Wort Anceps eben dieses, daß der die Anceps-Form repräsentirende Punkt zwei Fundamentalbereichen zugerechnet werden kann.

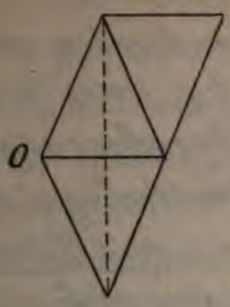
Da die Anceps-Formen für die spätere Theorie von besonderer Wichtigkeit sind, wollen wir ihre Eigenart noch durch die zugehörigen Gitter charakterisiren, wie bereits kurz vor Weihnachten begonnen wurde.

Entsprechend der allgemeinen Construction der Gitter, wonach bei definiten Formen die Seiten des Elementarparallelogrammes Va und Vc, der Winkel zwischen diesen $\gamma = \arccos \frac{b}{2\sqrt{ac}}$ betragen sollte, sind die Anceps-Klassen der ersten Art (mit dem Repräsentanten $b = 0$) dadurch characterisirt, dass sie ein <u>Rechteckiges Punktgitter</u> besitzen. Wir können nämlich ihr Gitter, indem wir eine geeignete Form, eben die reducirte Form mit $b = 0$, also $\gamma = 90°$ der Klasse, herausgreifen, aus einzelnen Rechtecken aufbauen.

Ferner sind die Anceps-Klassen der zweiten Art dadurch ausgezeichnet, dass ihr Punktgitter durch ein System von <u>Rhomben</u> erzeugt werden kann.

Liegt nämlich die erste Unterart mit dem Repräsentanten $a = c$ vor, so liefert die reducirte Form der Klasse direkt ein Parallelgitter mit

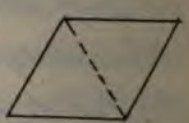
rhombischen Elementarparallelogrammen.



Liegt die zweite Unterart vor ($a = b$), so ist für die reducirte Form $\gamma c . \cos \gamma = \frac{a}{2}$, so dass die eine Hälfte des Elementarparallelogramms ein gleichschenkliges Dreieck wird. Man stellt dann durch eine Umordnung der Gitterstäbe, wie aus der nebenstehenden Figur ersichtlich ist, aus dem Parallelgitter der reducirten Form wiederum ein rhombisches Gitter her. Diese beiden Unterarten können noch durch den bei 0 gelegenen Winkel der Rhomben unterschieden werden. Im ersten Falle ($a = c$) besteht nach der Definition unseres a, b, c-Coordinatensystems für die Coefficienten der reducirten Form die Ungleichung $b < a$. Daher haben wir in dem rhombischen Gitter der reducirten Form $\cos \gamma = \frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$ oder $\gamma > 60°$. Im zweiten Falle ($a = b$) gilt für die Coefficienten der reducirten Form die Unglei-

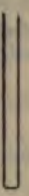
chung $a < c$. Hiebei wird in dem Gitter der reducirten Form $\cos\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}} < \frac{1}{2}$ oder $\gamma > 60°$. In dem aus dem reducirten Gitter erzeugten rhombischen wird der Winkel bei O gleich 2γ oder $> 120°$. Der zweite Winkel im Rhombus ergänzt diesen ersten selbstverständlich zu 180°. Wir können daher sagen: die Winkel der Rhomben unterscheiden sich im ersten Falle von einem Rechten um weniger, im zweiten Falle um mehr als 30°.

Die höheren Ausnahmefälle, denen 8 und 12 Automorphien entsprechen, ordnen sich in die aufgezählten Gitter als Grenzfälle ein. So bildet diejenige Klasse, deren reducirte Form die Coefficienten $a = b = c$ hat, den Übergang zwischen unsern beiden Unterarten von rhombischen Gittern. Wir haben daher hier einen Rombus mit einem Winkel von 60° als Elementarparallelogramm. Das zu dieser Klasse gehörige Gitter bezeichnen wir als gleichseitiges, weil es durch Aneinanderlagerung von



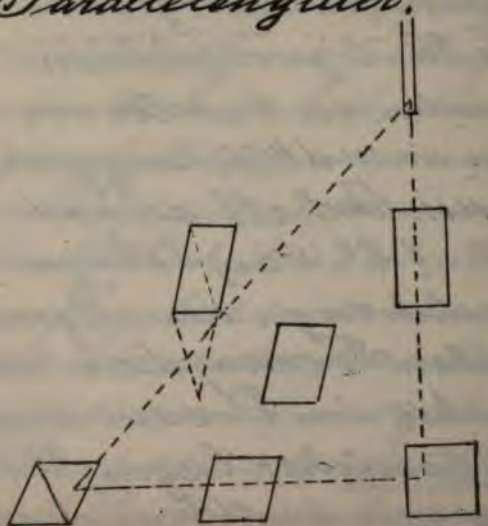
gleichseitigen Dreiecken erzeugt werden kann. Andererseits bildet der Fall $a = c$, $b = 0$ den Uebergang von den rhombischen zu den rechteckigen Gittern. Das Elementarparallelogramm dieses Falles ist daher gleichzeitig ein Rhombus und ein Rechteck, d. h. es ist ein Quadrat. Demnach wird das Gitter dieser Klasse als quadratisches Gitter zu bezeichnen sein.

Wollen wir schliesslich auch noch die dritte Ecke unseres Fundamentalbereichs $a = 0$, $b = 0$ berücksichtigen, so haben wir für diese ein ausgeartetes Elementarparallelogramm mit der Seite $Va = 0$ zu verzeichnen. Übrigens müssten wir dasselbe von rechtswegen unendlich lang zeichnen, weil sein Inhalt die endliche Grösse $-(b^2 - 4ac)$ betragen soll.



Endlich gehören zu den allgemeinen quadratischen Formen, deren repräsentirende Punkte im Innern des Fundamentalbereiches liegen, Gitter von denen wir auf Grund der

Ungleichungen $0 < b < a < c$ nur aussagen können, dass ihr Winkel $\gamma > 60°$ ist, und dass die Seite Vc jedesmal länger ist als die Seite Va. Fragen wir die den einzelnen Stellen des Fundamentalbereiches zugehörigen Parallelogramme in dem folgenden Schema andeutungsweise ein, erhalten wir eine Übersicht über den continuirlichen Zusammenhang zwischen der Lage der Punkte a, b, c im Fundamentalbereiche und der Gestalt der zugehörigen Parallelengitter.



Indem wir unsere Betrachtung der definiten Formen beschliessen, betonen wir nochmals die Schönheit unserer Dreiecksconstructionen, welche die ganze Theorie der Aequivalenz in sich enthalten. Diese Schönheit ruht natürlich auf dem hohen Grade der Symmetrie, welche die Figur besitzt, d. h. auf der grossen Zahl von Transformationen, welche dieselbe in sich selbst überführen. Man darf wohl sagen, dass die moderne Geometrie keine Figur aufgedeckt hat, welche einen so weitgehenden Gedankeninhalt besässe. Über die Zahlentheorie hinaus beherrscht unsere Figur die Theorie der elliptischen Modulfunctionen und leitet von hier aus zu den automorphen Functionen über, in deren Theorie ähnliche (verallgemeinerte) geometrische Constructionen Platz greifen. Auch auf höhere Gebiete der Zahlentheorie lässt sich unser geometrisches Verfahren verallgemeinern. Deutet man beispielsweise die Coefficienten von quadra-

tischen Formen mehrere Veränderlicher als homogene Coordinaten in einem Raume von genügend hohen Dimensionenzahl, so wird sich als Ort der definiten Formen ein Gebiet abgrenzen lassen, welches sich entsprechend den unimodularen ganzzahligen Substitutionen der ursprünglichen Veränderlichen gleichfalls in charakteristischer Weise in Parzellen zerlegt. Man kann geradezu sagen, dass ein grosser Theil der Zahlentheorie in dem Studium der Raumeinteilungen besteht oder bestehen sollte, welche irgend welchen discontinuirlichen Transformationsgruppen entsprechen. Hierzu bieten die folgenden Erläuterungen über Formen mit $D = 0$ und $D > 0$ noch wesentliche Gesichtspunkte.

3. Die Formen mit $D = 0$ und die Punkte auf dem Kegelschnitt.

Wir gehen nunmehr auf den Rand unseres Kegelschnitts, indem wir

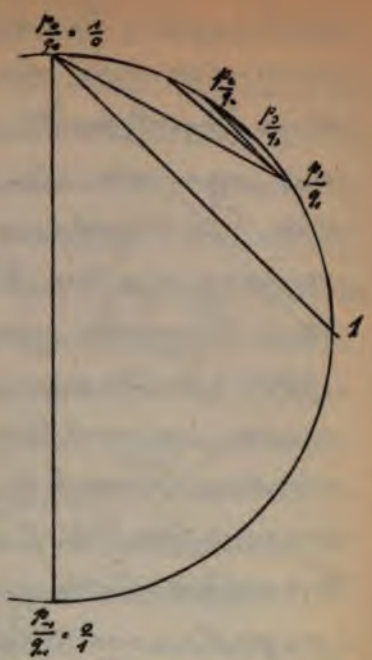
die Betrachtung der zerfallenden quadratischen Formen von der Discriminante D. 0 beginnen.

Man stellt sich das Aequivalenzproblem wesentlich einfacher. Was zunächst die rationalen Punkte betrifft, so wissen wir von vorneherein, dass irgend zwei Punkte mit rationalem Parameter w und w' unter sich allemal aequivalent sind. Handelt es sich dagegen um zwei irrationale Punkte, so haben wir nach dem Früheren w und w' in einen Kettenbruch zu entwickeln. Die Punkte sind dann und nur dann aequivalent, wenn die zugehörigen Kettenbrüche von einer gewissen Stelle ab lauter gleiche Teilnenner a aufweisen.

Das geometrische Gegenbild der Kettenbruchentwickelung auf der Peripherie unseres Kreises ist uns von pag. 202 her bekannt. Dieselbe bedeutet die successive Construction von Elementarsehnen erster Art, welche von den Punkten 0 und ∞ beginnend je zwei

Näherungspunkte der Kettenbruchentwik
kelung verbinden. Dabei gehen von dem
Näherungspunkte $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$ (a_r Elementarseh-
nen aus, welche nach den (a_r-1) folgen-
den Näherungspunkten und dem $(r+1)^{ten}$
Hauptnäherungspunkte führen. Wir haben
in dieser Weise die Kettenbruchentwik
kelung allerdings nur für ein ratio-
nales w gedeutet. Für ein irrationa-
les w bleibt die Sache aber gerade
so, mit dem einzigen Unterschiede, dass
wir hierbei den Punkt w niemals mit
einer Sehne wirklich erreichen, sondern
ihm nur mehr und mehr nahe kom-
men. Die so entstehende Figur hat
in der Hauptsache die Gestalt einer
nicht abbrechenden Zickzack-Linie,
welche je die Hauptnäherungspunk-
te der Kettenbruchentwickelung ver-
bindet. In den Ecken der Zickzack-
linie laufen noch je (a_r-1) Geraden
fächerförmig zusammen. Messen
wir die Grösse der Eckenwinkel et-
wa durch die Anzahl dieser Gera-
den, so können wir die Bedingung

für die Aequivalenz zweier irrationaler Punkte w und w' so formuliren: Es müssen in den zugehörigen Zickzack hinein von einer gewissen Stelle ab die Ecken gleich gross werden. Die rationalen Punkte bilden zusammen eine Klasse aequivalenter Punkte. Dieselben liegen, wie aus der Construction der rationalen Scala hervorgeht, auf dem Kegelschnitte überall dicht. Dasselbe gilt auch von jeder Klasse irrationaler w. Wir behaupten nämlich: <u>In jedem beliebig klein gegebenen Stücke der Kreisperipherie liegen immer Punkte, welche zu einem gegebenen w aequivalent sind.</u> In der That liegen in dem gegebenen Stücke sicher zwei Punkte, welche Endpunkte einer Elementarsehne erster



Art sind. In dieser Elementarsehne können wir von der Sehne $0\,\infty$ ausgehend durch eine Zickzack-Linie hingelangen. Setzen wir von da aus die Linie nach dem durch die Kettenbruchentwickelung von w angezeigten Schema fort, indem wir die Grösse der folgenden Ecken nach den Teilnennern $(a_r$ von w bestimmen, so nähern wir uns hierdurch einem Punkte w', welcher mit w aequivalent ist und welcher unserer Construction zufolge innerhalb des vorgegebenen Stückes der Kreisperipherie liegt. Hiermit ist gezeigt, daß auch die Punkte der sämtlichen irrationalen Klassen von w-Werten auf dem Kegelschnitte überall dicht liegen.

In diesem Gewirr von aequivalenten Punkten kann sich die geometrische Anschauung nicht mehr zurecht finden; nur die arithmetische Behandlung wird hier die Frage der Aequivalenz entscheiden können. Die Dinge liegen also auf dem Rande des fundamentalen Kegelschnittes

gerade umgekehrt, wie im Innern. Während dort die arithmetischen Verhältnisse im geometrischen Bilde sehr übersichtlich wurden, versagt hier die geometrische Anschauung völlig – ein Beispiel dafür, wie sich der geometrische und der arithmetische Standpunkt wechselweise ablösen müssen. Vielleicht kann man sagen: die geometrische Auffassung ergibt überall da aber auch nur da Erleichterungen, wo es sich um arithmetische Ungleichungen handelt.

Wir knüpfen hieran eine Bemerkung, welche für die Auffassung der Gruppeneigenschaft von principieller Bedeutung ist. Wie wir sahen, hat auf dem Rande des Kegelschnittes unsere Gruppe der $(\alpha\ \beta)$ Substitutionen nirgends einen Bereich, in dem sie discontinuirlich ist. Beachtet man nur dieses, so möchte man unsere Gruppe für continuirlich halten. Das ist sie aber keineswegs, denn im Innern des Kegel-

schnittes besitzt die ihre wohl abgegrenzten Fundamentalbereiche. Um diese Verhältnisse kurz bezeichnen zu können, werden wir sagen: Unsere Gruppe ist im Innern des Kegelschnitts eigentlich -, auf dem Rande uneigentlich - discontinuirlich, womit aber nichts über die Gruppe als solche, sondern nur etwas über ihr Verhalten in diesem Gebiete ausgesagt sein soll. Die Gruppe als solche ist discontinuirlich schlechtweg.

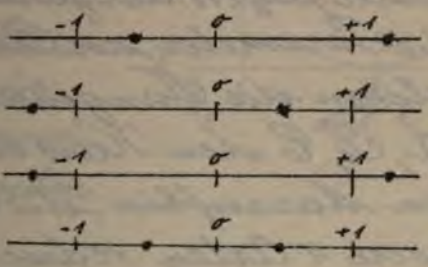
4. Die indefiniten Formen mit $D' > 0$ und die Punkte ausserhalb des Kegelschnittes.

Es bleiben die indefiniten Formen mit $D' > 0$ zu behandeln, denen das Aeussere des Kegelschnittes zukommt. Wir fragen auch hier zunächst nach dem reducirten Raume. Die Definition der reducirten Formen (A, B', C) war diese: $A > 0$, $C < 0$. Des genaueren teilten wir die reducirten Formen in folgende Un-

terabteilungen ein

Hauptreduc.	I. Art.	$A+B+C<0,\ A-B+C>0.$
"	II. Art.	$>0,$ $<0.$
Nebenreduc.	I. Art.	$<0,$ <0
"	II. Art	$>0,$ >0

Wurzeln λ von $A\lambda^2+B\lambda+C=0$:



Wir bemerken, dass die hiermit gegebene Definition der reducirten Formen einigermassen im Widerspruch steht mit unserer geometrischen Darstellung, in welcher nur die Verhältnisse $A:B:C$ zum Ausdruck kommen, während es in den vorstehenden Ungleichungen auf die absoluten Werte der A, B, C ankommt. Wir charakterisiren die reducirten Formen daher lieber durch die (jetzt natürlich reellen) Wurzeln, welche sich beim

schnittes besitzt die ihre wohl abgegrenzten Fundamentalbereiche. Um diese Verhältnisse kurz bezeichnen zu können, werden wir sagen: Unsere Gruppe ist im Innern des Kegelschnitts eigentlich -, auf dem Rande uneigentlich - discontinuirlich, womit aber nichts über die Gruppe als solche, sondern nur etwas über ihr Verhalten in diesem Gebiete ausgesagt sein soll. Die Gruppe als solche ist discontinuirlich schlechtweg.

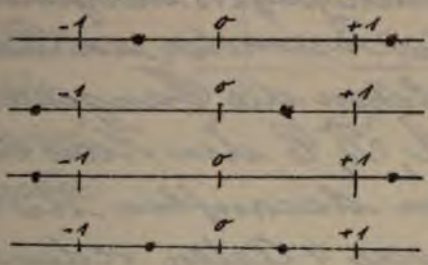
4. Die indefiniten Formen mit $D > 0$ und die Punkte ausserhalb des Kegelschnittes.

Es bleiben die indefiniten Formen mit $D > 0$ zu behandeln, denen das Aeussere des Kegelschnittes zukommt. Wir fragen auch hier zunächst nach dem reducirten Raume. Die Definition der reducirten Formen (A, B, C) war diese: $A > 0$, $C < 0$. Des genaueren teilten wir die reducirten Formen in folgende Un-

terabteilungen ein

Hauptreduc.	I. Art.	$A+B+C<0,\ A-B+C>0.$
"	II. Art.	$>0,\ <0.$
Nebenreduc.	I. Art.	$<0,\ <0$
"	II. Art	$>0,\ >0$

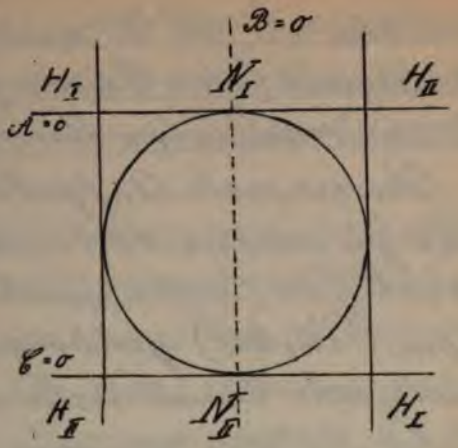
Wurzeln λ von $A\lambda^2+B\lambda+C=0$:



Wir bemerken, dass die hiermit gegebene Definition der reducirten Formen einigermassen im Widerspruch steht mit unserer geometrischen Darstellung, in welcher nur die Verhältnisse $A:B:C$ zum Ausdruck kommen, während es in den vorstehenden Ungleichungen auf die absoluten Werte der A, B, C ankommt. Wir characterisiren die reducirten Formen daher lieber durch die (jetzt natürlich reellen) Wurzeln, welche sich beim

Nullsetzen der Form ergeben, sagen wir durch die Wurzeln R_1, R_2 der Gleichung $AR^2 + BR + C = 0$. Durch die relative Lage dieser Wurzeln gegenüber den Werten $-1, 0, +1$ sind, wie früher hervorgehoben, unsere Unterabteilungen gleichfalls unterschieden. Diese Lage ist in dem obigen Schema pag 245 dargestellt. Da R_1, R_2 die Parameter der Punkte bedeuten, in welchen die Tangenten vom Punkte A, B, C den Kreis berühren, so kann man daraufhin die resp. Gebiete für unsere 4 Arten reducirter Formen bestimmen. Zunächst ist klar, dass reducirte Formen überhaupt oberhalb der oberen und unterhalb der unteren horizontalen Tangente des Kreises gelegen sind. Im Uebrigen beschreibt sich die Verteilung der reducirten Formen am Einfachsten, wenn man das von den horizontalen und verticalen Tangenten begrenzte vollständige Viereit betrachtet. Dasselbe teilt die Ebene in 4 Dreiecke und 3 Vierecke. Von diesen werden

2 Vierecke durch die Hauptreducirten erster und zweiter Art, zwei Dreiecke durch die Nebenreducirten erster und zweiter Art ungenommen, wie in der Figur näher angegeben ist.



Hier fällt zunächst in 's Auge, daß das Gebiet der reducirten Formen gewissermassen einen viel grösseren Teil des Gesamtgebietes der indefiniten Formen einnimmt, als das reducirte Gebiet im Falle der definiten Formen that. Dafür gilt in dem jetzigen reducirten Bereiche nicht mehr der Satz, daß keine zwei Punkte derselben unter sich aequivalent sind, vielmehr gehört zu jeder reducirten Form noch eine unendliche Kette aequi-

valenter reducirter Formen hinzu, eine Kette, welche sich nur im Falle commensurabler A, B, C mit einer endlichen Gliederzahl (der Gliederzahl in der Periode der reducirten Formen) schliesst.

Unsere erste Aufgabe wird nun sein, die zu einem reducirten Punkte unserer Figur (oder auch die zu irgendwelchem Punkte) gehörige Kette durch geometrische Construction zu ermitteln. Dabei stützen wir uns auf einen wichtigen Gedanken, welcher von Hermite zuerst algebraisch ausgesprochen ist (in Crelle Bd. 41, 1851) und der später in's Geometrische übersetzt worden ist (vergl. Modulfunctionen Bd I pg. 256, ferner die wiederholt genannte Abhandlung von Hurwitz in Math. Annal. Bd. 45). Hermite geht davon aus, dass die Reduction der definiten Formen bekannt ist, er spielt nun die Aufgabe für die indefiniten Formen in das Gebiet der definiten Formen hinüber, indem er jeder indefiniten Form

definite Formen in geeigneter Weise covariant zuordnet, d.h. in solcher Weise dass die Beziehung zwischen der gegebenen Form und den zugeordneten durch die Substitutionen (α, β) nicht gestört wird.

Bo. d. 30. I. 96. Um diese covariante Beziehung naturgemäss zu entwickeln, bemerken wir, dass die einzelne quadratische Form $f = (a, b, c)$ als einzige Invariante ihre Discriminante $b^2 - 4ac$ besitzt, welche bei Substitutionen von der Determinante ± 1 völlig ungeändert bleibt. Handelt es sich darum eine invariante Beziehung zwischen 2 quadratischen Formen $f = (a, b, c)$ und $f' = (a', b', c')$, also eine simultane Invariante der beiden Formen aufzustellen, so betrachten wir das Büschel der Formen $f + \lambda f'$. Bilden wir die Discriminante einer beliebigen Form des Büschels:

$$(b + \lambda b')^2 - 4(a + \lambda a')(c + \lambda c'),$$

so muss dieselbe invarianter Natur

valenter reducirter Formen hinzu, eine Kette, welche sich nur im Falle commensurabler A, B, C mit einer endlichen Gliederzahl (der Gliederzahl in der Periode der reducirten Formen) schliesst.

Unsere erste Aufgabe wird nun sein, die zu einem reducirten Punkte unserer Figur (oder auch die zu irgendwelchem Punkte) gehörige Kette durch geometrische Construction zu ermitteln. Dabei stützen wir uns auf einen wichtigen Gedanken, welcher von Hermite zuerst algebraisch ausgesprochen ist (in Crelle Bd. 41, 1851) und der später in's Geometrische übersetzt worden ist (vergl. Modulfunctionen Bd I pg. 256, ferner die wiederholt genannte Abhandlung von Hurwitz in Math. Annal. Bd. 45). Hermite geht davon aus, dass die Reduction der definiten Formen bekannt ist; er spielt nun die Aufgabe für die indefiniten Formen in das Gebiet der definiten Formen hinüber, indem er jeder indefiniten Form

definite Formen in geeigneter Weise covariant zuordnet, d.h. in solcher Weise dass die Beziehung zwischen der gegebenen Form und den zugeordneten durch die Substitutionen (α, β) nicht gestört wird.

Bo. d. 30. I. 96. Um diese covariante Beziehung naturgemäss zu entwickeln, bemerken wir, dass die einzelne quadratische Form $f = (a, b, c)$ als einzige Invariante ihre Discriminante $b^2 - 4ac$ besitzt, welche bei Substitutionen von der Determinante ± 1 völlig ungeändert bleibt. Handelt es sich darum eine invariante Beziehung zwischen 2 quadratischen Formen $f = (a, b, c)$ und $f' = (a', b', c')$, also eine simultane Invariante der beiden Formen aufzustellen, so betrachten wir das Büschel der Formen $f + \lambda f'$. Bilden wir die Discriminante einer beliebigen Form des Büschels:

$$(b + \lambda b')^2 - 4(a + \lambda a')(c + \lambda c'),$$

so muss dieselbe invarianter Natur

sein, u. zw. bei beliebigen Werten von λ. Es müssen also auch die Coefficienten der nach λ geordneten Discriminante

$$(b^2 - 4ac) + 2\lambda(bb' - 2ac' - 2a'c) + \lambda^2(b'^2 - 4a'c')$$

Invarianten werden. Der Coefficient von 1 und λ^2 liefert nichts Neues, der Coefficient von 2λ aber giebt die gesuchte simultane Invariante der Formen f und f', nämlich

$$bb' - 2ac' - 2a'c.$$

Es sei nun (a', b', c') die gegebene indefinite Form. Wir ordnen ihr diejenigen definiten Formen (a, b, c) zu, welche mit ihr eine verschwindende simultane Invariante haben. Wir sind dann sicher, dass, bei einer Transformation der Form (a', b') mittelst einer $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ Substitution, der transformirten indefiniten Form in demselben Sinne diejenigen definiten Formen entsprechen, welche durch eine Transformation aus den Formen

(a, b, c) hervorgehen.

Geometrisch bedeutet diese Zuordnung nichts anderes, als den Uebergang von dem Pole $(a'b'c')$ zu seiner Polaren, oder genauer gesagt zu seiner „Polarsehne" indem nämlich von der Polaren nur dasjenige Stück betrachtet wird, welches definite Formen trägt, welches also im Innern des fundamentalen Kegelschnitts enthalten ist. Hiermit zeigt sich denn auch, dass es wirklich definite Formen der gewollten Art gibt. Die obige algebraische Definition hat jedoch vor der geometrischen, den Vorzug vor aus, dass sie die Verallgemeinerungsfähigkeit des Ansatzes auf höhere Fälle besser hervortreten lässt.

Durch das Hermite'sche Prinzip wird in die Zahlentheorie ein Begriff

eingeführt, der ihr sonst fremd ist, nämlich der Begriff der stetigen Zahlenreihe. Statt des einzelnen Zahlentripels (a', b', c') wird eine stetige Folge von Zahlen (a, b, c), statt des einzelnen Punktes ein geometrischer Ort von Punkten substituirt. In diesem Sinne überschrieb Hermite seine oben genannte Arbeit: Introduction des variables continues dans la théorie des nombres.

Wir haben jetzt unsere früheren Resultate hinsichtlich der Reduction der indefiniten Formen in die Vorstellungen des neuen geometrischen Bildes zu übersetzen. Wir fragen zunächst: Wie liegen die Polarsehnen, welche zu den reducirten Formen gehören? Die Bedingung für die reducirten Formen hiess $A > 0$, $C < 0$. Nun ergiebt $Aw^2 + Bw + C$ gleich Null gesetzt die Berührungspunkte w_1, w_2 der Tangenten vom Punkte $A = B = C$ und gleichzeitig die Endpunkte der Polarsehne. Die Punkte w_1, w_2 zerlegen die Kreisperipherie in 2 Teile.

In einem derselben ist $Aw^2 + Bw + C$ positiv, im anderen negativ. Wir bemerken, dass durch die Lage der Polarsehne über das Vorzeichen von $Aw^2 + Bw + C$ noch nichts ausgesagt wird. Unser geometrisches Bild ist aus diesem Grunde noch unvollständig, und zwar gerade in einer Hinsicht, die für die Reductionstheorie wesentlich ist. Wir können unser geometrisches Bild

aber leicht vervollständigen, indem wir dem einen Abschnitte der Kreisperipherie, in welchem $Aw^2 + Bw + C > 0$ ist, das Zeichen +, dem andern das Zeichen − hinzusetzen, wie beistehend geschehen. Alsdann zeigt unsere Figur nicht nur die Lage des Punktes $A : B : C$, sondern auch das Vorzeichen von A und C an. Es wird beispielsweise $C < 0$ sein, wenn der Punkt $w = 0$ in dem negativen Segmente der Kreisperipherie liegt; denn für $w = 0$ reducirt sich $Aw^2 + Bw + C$

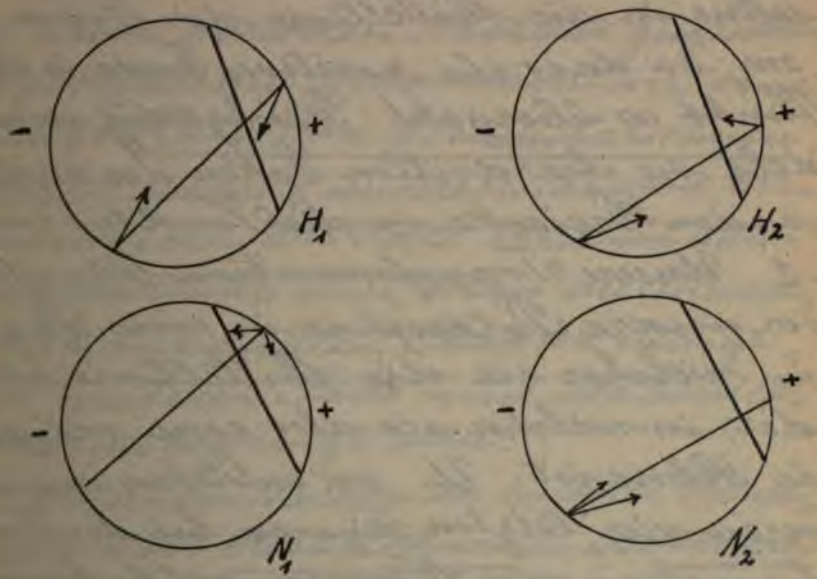
auf C. Es wird ferner $A > 0$ sein, wenn der Punkt $w = \infty$ in dem positiven Segmente enthalten ist; denn für $w = \infty$ stimmt das Vorzeichen von $Aw^2 + Bw + C$ mit dem von A überein. Berücksichtigen wir dieses, so lautet die Bedingung des Reducirtseins als Eigenschaft der Polarsehne ausgesprochen folgendermassen: Es muss der Punkt ∞ im positiven, der Punkt 0 im negativen Segmente liegen. Daraus folgt, dass die zu einer reducirten Form gehörige Polarsehne jedenfalls die Mittellinie $(0\ \infty)$ unserer Figur schneiden wird.

Im Uebrigen unterscheiden wir noch Haupt- und Nebenreducirte und Reducirte erster und zweiter Art. In der Figur kommt dieses darauf hinaus, dass wir die Polarsehnen je nach ihrer Lage gegen gewisse Elementarsehnen charakterisiren. Betrachten wir nämlich die Tabelle von pg. 245, so beruht die Einteilung der Reducirten auf dem Vorzeichen von $A \pm B + C$, also auf dem Vorzeichen des Ausdrucks

Aw^2+Bw+C für $w=+1$ und $w=-1$. Geometrisch gesprochen kommt es also darauf an, ob die Punkte $+1$ und -1 der Kreissphärie im positiven oder negativen Segmente liegen. Wir verbinden diese Punkte mit 0 und ∞ und erhalten ein dem Kreise eingeschriebenes Quadrat. Im Anschluss an dieses lässt sich der Unterschied zwischen Haupt- und Nebenreducirten einfach so aussprechen: Die Polarsehnen von Haupttreducirten treffen das Quadrat in zwei gegenüberliegenden Seiten, die Polarsehnen von Nebenreducirten in zwei bei 0 oder ∞ zusammenstossenden Seiten. Die vollständige Unterscheidung ergiebt sich aus den folgenden Figuren, deren Richtigkeit ein Vergleich mit der Tabelle von pg. 245 lehrt:

Weiter untersuchen wir die Lage einer (nicht notwendig reducirten) Polarsehne gegen die Gesamtheit der Elementarsehnen erster Art. Wir greifen zunächst irgend eine Elementarsehne heraus, welche von unserer Polaren geschnitten wird. An diese Elementarsehne legen sich nach der einen und anderen Seite hin je ein Constructionsdreieck an, dessen beide weitere Seiten wieder von Elementarsehnen gebildet werden. Von diesen beiden Seiten der benachbarten Constructionsdreiecke wird je eine durch unsere Polarsehne geschnitten. Wir markiren diese Seite im einen und anderen Dreiecke und nennen sie die zu der ersten Elementarsehne benachbarten

Sehnen. Jede Elementarsehne hat in diesem Sinne einen rechten und einen linken Nachbar. Nach der Lage dieser Nachbarn gegen die ursprüngliche Elementarsehne unterscheiden wir 4 Fälle, die wir im Folgenden schematisch verzeichnen:



War unsere Polarsehne nicht reducirt, so ist es jetzt leicht eine Transformation anzugeben, die sie zu einer reducirten macht. Unsere erste Elementarsehne hat zu Endpunkten gewis-

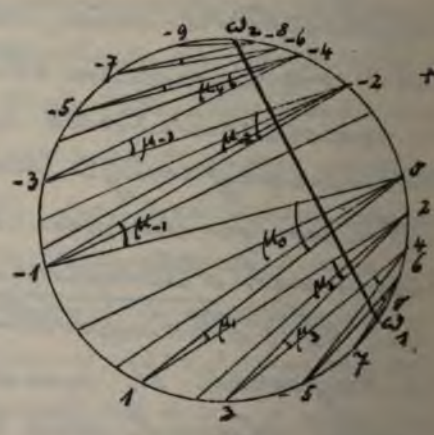
se rationale Punkte der Kreisperipherie, welche $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ heissen mögen, u. zw. sei $\frac{\alpha}{\gamma}$ derjenige Endpunkt, welcher im positiven Segmente befindlich ist. Wir nehmen dabei die Vorzeichen so, dass $(\alpha\delta - \beta\gamma) = +1$ wird. Nun verwandelt die Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ diese Elementarsehne in die Mittellinie der Figur u. zw., so dass ihr positives Ende in den Punkt ∞ übergeht. Gleichzeitig vermandelt sie die dritten Ecken der anstossenden Dreiecke in die Punkte $+1$ und -1. Unsere Transformation bringt also unsere Polarsehne in eine Lage, in welcher sie die Mittellinie schneidet, in welcher sie also eine reducirte Sehne ist. U. zw. entstehen aus unseren vier letzten Figuren bei der Transformation vier Figuren, welche hinsichtlich der Lage der Polarsehne gegen das Sehnenviereck $\infty, +, 0, +1$ mit den vier vorletzten Figuren identisch sind. Es liefern also unsere vier Figuren bez. eine Haupttreducirte

erster oder zweiten Art etc., wie durch die beigefügten Zeichen H_1, H_2, N_1, N_2 angedeutet ist.

In derselben Weise, wie wir soeben zu einer ersten Elementarsehne nach rechts und links einen Nachbar hinzuconstruirt haben, können wir diesen letzteren je einen weiteren Nachbar zugesellen. So fortfahrend bekommen wir eine ganze Kette von Elementarsehnen, durch welche unsere Polarsehne hindurchzieht. Die Kette wird nur dann eine endliche sein, wenn die Polarsehne in rationalen Punkten endigt, im anderen Falle wird sie beiderseits unbegrenzt sein.

Wir unterscheiden in unserer Sehnenkette noch Hauptsehnen und Nebensehnen. Die Hauptsehnen sind durch die Figuren H_1 und H_2, die Nebensehnen durch die Figuren N_1 und N_2 von pg. 257 characterisirt. Die Hauptsehnen bilden für sich eine Zickzacklinie, welche die beiden Endpunkte w_1 und w_2 der Polar-

sehne asymptotisch einschliessen. Von den einzelnen Ecken dieser Zickzacklinie strahlen eventuell eine Anzahl von Nebensehnen (sagen wir (n-1) Nebensehnen) aus. Die Ecken der Zickzacklinie bezeichnen wir, von einer beliebigen Ecke beginnend, mit (0) (1) (2) .. (-1), (-2), ... Die zu den bez. Ecken gehörigen Zahlen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{-1} \ldots$ betrachten wir als ein Maass für die Grösse des Eckenwinkels.



Jede dieser Elementarsehnen gibt uns eine Transformation an die Hand, durch welche wir unsere Polarsehne zu einer reducirten machen können. Der Aufeinanderfolge dieser Elementarsehnen läuft daher eine Aufeinanderfolge von reducirten Formen parallel. Wir behaupten

num: Diese Aufeinanderfolge reducirter Formen ist mit der früher betrachteten Kette reducirter Formen direct identisch. Wir erhalten also die frühere Kette, indem wir der Reihe nach alle Sehnen unserer Sehnenkette derart in die Mittellinie transformiren, dass immer das positive Sehnenende nach $w = \infty$ fällt.

i. d. 31. I. 96. Der Beweis dieses Satzes lässt sich direct von unserer Figur aus führen. (Vergl. hierzu Hurwitz in der mehrfach genannten Arbeit, Math. Ann. Bd. 45). Wir ziehen es aber vor, auf unsere frühere Gitterfigur zu recurrieren, um so den Zusammenhang zwischen dem jetzigen und dem damaligen geometrischen Bilde herzustellen.

Die reducirten Formen, welche wir nach unserer jetzigen Methode erhalten, sind den Elementarsehnen der Zickzacklinie eindeutig zugeordnet. Jede Elementarsehne können wir dabei ersetzen durch ihre Endpunkte, d. h. durch ein Paar rationaler Punkte,

wobei der eine Punkt des Paares auf dem positiven, der andere auf dem negativen Segmente der Kreisperipherie gelegen ist.

Wir erinnern uns nun an die beiden „natürlichen Umriss-polygone" der früheren Gitterfigur, denen eines im positiven Quadraten, das andere im nebenliegenden negativen Quadraten lag. Die Ecken des ersten Polygons wurden mit den geraden, die Ecken des anderen mit den ungeraden Indices bezeichnet, und nun wurden die reducirten Formen dadurch gewonnen, dass man jedesmal eine Ecke des einen Polygons mit der darauf folgenden Ecke des anderen Polygons zusammennahm. Können wir nun zeigen, dass jene Punkte der Kreisperipherie und diese Eckpunkte der natürlichen Umrisspolygone gegenseitig eindeutig zusammengehören, so wird dadurch gleichzeitig bewiesen, dass auch die reducirten Formen, welche wir durch die eine oder

andere Methode erhalten können, dieselben sind.

Zunächst führen wir für die rationalen Parameterwerte der Zickzack-Ecken eine passende Bezeichnung ein. Es heisse der zur Ecke (r) gehörige Parameter $\frac{p_r}{q_r}$ (wobei wir die p_r, q_r als teilerfremde ganze Zahlen voraussetzen). Alsdann haben wir etwa auf dem positiven Kreissegmente die Eckpunkte

$$\ldots \frac{p_{-2}}{q_{-2}}, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$$

mit den zugehörigen Winkelgrössen

$$(\underline{u}_2, (u_0, (u_2 \cdots$$

Ebenso liegen auf dem negativen Kreissegmente die Punkte

$$\ldots \frac{p_{-1}}{q_{-1}}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots$$

mit den zugehörigen Winkeln

$$= \cdots (u_{-1}, (u_1, (u_3, \cdots$$

Zwischen diese Zahlen ordnen sich noch die zu den freien Enden der Nebenschnen gehörigen Parameter =

werte ein.

Andrerseits bezeichnen wir die Coordinaten x und y der Ecken unserer zur Form $f(x\,y)$ gehörigen natürlichen Umrisspolygone mit $(p_r\,,\,q_r)$. Wir behaupten nun, dass die Zahlen p_r und q_r in beiden Fällen dieselben sind. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus dem Zusammenhang unserer beiderlei Figuren mit gewissen Kettenbruchentwickelungen.

Was zunächst die Kreisfigur betrifft, so transformiren wir in dieser die Sehne mit den Endpunkten $\frac{p-1}{q-1}$ und $\frac{p}{q}$ auf die bekannte Art und Weise in die Mittellinie der Figur, wobei die Polarsehne in die Polare einer reducirten Form F verwandelt wird. Die transformirte Zickzacklinie sondern wir in zwei Hälften, welche beide von der Mittellinie ausgehend nach rechts und

...ks hin auf die Wurzeln Λ_1, Λ_2 von
... o zustreben. Von solchen Teilzick...
...oklinien lernten wir auf pg. 241, dass
... genau die Kettenentwickelungen
...jenigen Kreispunkte wiedergeben,
...f welche sie zustreben, wobei ihre
...ken die Näherungsbrüche, ihre Winkel
...ie Teilnenner des Kettenbruches lie...
...n. Daraus folgt, dass die Zahlen
... bei positivem Index die Näherungs...
...rüche von Λ_1, bei negativem die
...n Λ_2 darstellen.

Andrerseits betrachten wir die natür...
...hen Umrisspolygone in der Gitterfigur.
...hren wir ein re...
...cirtes x, y-Coor...
...natensystem ein,
...zerschneiden
...ine Axen die na...
...rlichen Umriss...
...lygone gleich...
...lls in zwei
...älften, welche
...ich bez. den Null...
...ahlen $\frac{x}{y} = \Lambda_1$,

oder $\frac{x}{y} = \Lambda_2$ der zu dem benutzten Coordinatensystem gehörigen reducirten Form F anschmiegen. Die auf solche Weise entstehenden Teilpolygonzüge stellen aber ihrerseits nach Früherem die Kettenbruchentwickelung von Λ_1, bez. von Λ_2 dar, wobei jetzt die Polygonecken die Coordinaten $x = p_r$, $y = q_r$ erhalten. Wir dürfen dabei ersichtlich annehmen, dass die Wurzeln Λ_1, Λ_2, die wir jetzt betrachten, dieselben sind, wie vorher bei der Kettenbruchentwickelung auf der Kreisperipherie. Da nämlich unsere Umrisspolygone sämtliche reducirten Formen liefern, so muss es möglich sein, das Coordinatensystem so zu legen, dass gerade die vorher benutzte reducirte Form F sich ergibt. Hiermit haben die Eckpunkte der Umrisspolygone dieselben Grössen p_r, q_r, zu Gittercoordinaten, welche vorher in den Parameterwerten der Zickzackecken auftraten.

Nach den Bemerkungen zu Bö-

gimm dieses Beweises folgt dann weiter, dass in der That unsere beiden Figuren hinsichtlich der Reduction der indefiniten Formen dasselbe leisten. Der innere geometrische Zusammenhang dieser beiden so verschiedenen Figuren ist jedenfalls ein sehr merkwürdiger. Wir bemerken noch, dass die freien Ecken der $(\mu-1)$ Nebenseiten, welche von einem Eckpunkte unserer Zickzacklinie auslaufen, ihrerseits die Parameterwerte $w = \frac{p}{q}$ aufweisen, welche den Coordinaten p, q der $(\mu-1)$ Nebenpunkte entsprechen, welche die correspondirende Seite des einen Umrisspolygons im Gitter trägt.

Es wird nun darauf ankommen, aus der neuen Figur neue zahlentheoretische Resultate abzuleiten. Wir nehmen zunächst die Frage nach den Automorphien einer Form f noch einmal auf. Wir wollen jetzt 4 Arten von Automorphien unterscheiden, welche durch

was folgende Schema charakterisirt sind:

1. $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, $w_1 \sim w_1$, $w_2 \sim w_2$
2. $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, $w_1 \sim w_2$, $w_2 \sim w_1$
3. $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, $w_1 \sim w_2$, $w_2 \sim w_1$
4. $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, $w_1 \sim w_1$, $w_2 \sim w_2$

Im Falle 2. und 3. werden hiernach die Wurzelpuncte von $f = 0$ auf dem Kreise vertauscht, im Falle 1. und 4. bleiben sie fest. Im Falle 1. und 2. handelt es sich um eine Substitution, welche den positiven Sinn, in welchem wir uns die Kegelschnittperipherie durchlaufen denken mögen, ungeändert lässt, im Falle 3. und 4. um eine Substitution, welche diesen Sinn umkehrt.

Der Fall 1. ist früher ausführlich untersucht worden. Der Determinante $+1$ und dem Festbleiben der Wurzelpunkte entsprechend wird dabei das positive Segment unseres Kegelschnitts in das positive, das negative in das negative übergeführt. Dieser Fall führt auf die

gewöhnliche Theorie der Pell'schen Gleichung $t^2 - Du^2 = 4$.

Im Falle 2. wird die Kreisperipherie in sich verschoben, so dass w, nach w_2 und w_2 nach w, gelangt. Da (wegen der Substitutionsdeterminante $+1$) die Reihenfolge der einzelnen Teile der Kreisperipherie nicht geändert wird, so gelangt hierbei das positive Segment an den Platz des negativen und das negative an den des positiven; es geht f in $-f$ über. Der zweite Fall tritt hiernach dann ein, wenn eine Form ihrer entgegengesetzten eigentlich aequivalent ist. Die Form heisst dann sich selbst „invers", vergl pag. 161:

Der Fall 3. bedeutet eine Spiegelung an einer Elementarsehne, welche das positive und negative Segment je in 2 Abschnitte zerlegt. Bei der Spiegelung werden diese Abschnitte des positiven Segments (und ebenso die des negativen) unter sich ausgetauscht, so dass $+f$ in $+f$ übergeht. In diesem

Falle gehört f zu einer Anceps. Klasse.

Der Fall 4. gibt zu der „ausserge-wöhnlichen Pell'schen Gleichung" $t^2 - Du^2 = -4$ Anlass. Das positive und negative Segment des Kreises werden im Falle 4. gegenseitig vertauscht; f geht daher in $-f$ über.

Bei commensurabeln a, b, c sind die Automorphien 1. wie wir wissen, immer u. zw. in unendlicher Zahl vorhanden. Zugleich ist klar, dass diese Automorphien nur bei commensurabeln a, b, c eintreten, denn $f=0$ soll mit den Fixpunkten von $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ übereinstimmen. Von den 3 anderen Arten braucht im Allgemeinen keine aufzutreten. Diese letzteren bedingen sich dabei gegenseitig, in dem Sinne, dass das Eintreten von zweien derselben auch Automorphien des dritten Falles nach sich zieht. Wenn beispielsweise Automorphien des Falles 2. und 3. vorhanden sind, so erhält man durch Zusammensetzung von zwei solchen Automorphien eine Automor-

phie von der Determinante -1, welche w_1 in w_1 und w_2 in w_2 überführt, d. h. eine Autamorphie des Falles 4. Aus dieser Bemerkung fliessen Sätze der folgenden Art: Wenn es in einer Aequivalenz-Klasse eine Form gibt, welche mit ihrer entgegengesetzten eigentlich aequivalent ist, so besitzt die ausserordentliche Pell'sche Gleichung Lösungen etc. Fall 4. ist wieder durchaus daran gebunden, dass die Coefficienten a, b, c der vorgelegten Form commensurabel sind.

Do. d. 6. II. 96. Wir fragen nun nach der geometrischen Bedeutung dieser 4 Arten von Autamorphien. Zum vollen Verständnis dessen müssen wir uns eine Begriffsbildung aneignen, welche von Cayley herrührt, die Cayley'sche Maassbestimmung. Dieselbe hängt auf's Innigste mit unserer Dreiecksfigur und allen jenen höheren Figuren zusammen, welche sich beim Studium von Gruppen linearer Substitutionen in der Theorie der automorphen

Functionen darbieten. Leider können wir hierauf nicht mehr so ausführlich eingehen, als es der Wichtigkeit der Sache angemessen wäre.

Wir haben schon im ersten Teil dieser Vorlesung bei den Gitterbetrachtungen eine Pseudometrik eingeführt. Damals genügte es uns, statt der imaginären Kreispunkte zwei andere (reelle oder imaginäre) Punkte der unendlich fernen Geraden zu substituiren und diese einer Maassbestimmung zu Grunde zu legen. Jetzt gehen wir mit Cayley einen Schritt weiter. Wir fassen nämlich die beiden Kreispunkte zusammen mit der doppelzählenden Verbindungslinie, d. i. der unendlich weiten Geraden, als einen ausgearteten Kegelschnitt auf und ersetzen ihn durch einen nichtausgearteten. In unserem Falle wählen wir als solchen unseren fundamentalen Kegelschnitt $D = 0$. Die Cayley'sche Maassbestimmung steht nun zu diesem Kegelschnitt in einer ganz ähnlichen

Beziehung, wie die gewöhnliche Maassbestimmung zu dem Paar der imaginären Kreispunkte. Um zunächst den Winkel zweier Geraden zu definiren, ziehen wir von ihrem Schnittpunkte aus die Tangenten an den fundamentalen Kegelschnitt und berechnen das Doppelverhältnis (D) jener Geraden mit diesen Tangenten. Alsdann bezeichnen wir als Winkel (w) jener beiden Geraden die Grösse

$$W = \frac{i}{2} \lg D$$

Dualistisch genau entsprechend definiren wir die Entfernung zweier Punkte, indem wir zu den gegebenen Punkten die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit dem fundamentalen Kegelschnitt hinzunehmen und das Doppelverhältnis (D') dieser 4 Punkte bilden. Alsdann bezeichnen wir als Entfernung (E) der gegebenen Punkte

$$E = \frac{i}{2} \lg D'.$$

Dieses die einfachen Grundzüge jener Theorie. Ich muss es Ihnen überlassen, sich in dieselbe soweit einzuleben,

daß Sie Sich wamöglich in einer mit Cayley'scher Maassbestimmung ausgestatteten Ebene gleich leicht, wie in der gewöhnlichen, zurecht finden.

Hier interessiren uns vornehmlich die Substitutionen (4 3), welche uns gewisse Collineationen der Ebene lieferten. Da dieselben unseren fundamentalen Kegelschnitt in sich überführen, so lassen sie auch die Maassverhältnisse der Figuren völlig ungeändert. Zwei Geraden bilden also nach der Collineation denselben Winkel, wie vor derselben, zwei Punkte haben vor und nach der Collineation dieselbe Entfernung. Wir unterscheiden dabei zwischen den Substitutionen von der Determinante +1 und denen von der Determinante −1. Bei den ersteren bleibt auch der Sinn, in dem die Punkte des Kegelschnitts auf einander folgen, ungeändert, bei den letzteren wird er umgekehrt. Irgend eine Figur der Ebene geht daher bei den Substitutionen

$\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ in eine direct congruente, bei den Substitutionen $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ in eine invers congruente über. Wir bezeichnen die ersteren als Bewegungen, die letzteren als Umlegungen der Ebene. Wir würden die Gesammtheit dieser Bewegungen und Umlegungen erhalten, wenn wir die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als continuirliche Parameter ansehen wollten, nun sie aber nur ganzzahlige Werte annehmen können haben wir eine in dieser Gesammtheit enthaltene discontinuirliche Untergruppe vor uns.

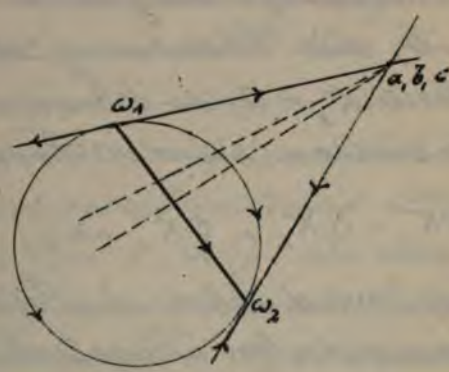
Bei allen Bewegungen und Umlegungen dieser Untergruppe geht unsere Figur in sich über und zwar geht bei der Gesammtheit unserer Bewegungen jedes schraffirte Dreieck in jedes schraffirte, bei der Gesammtheit der Umlegungen jedes schraffirte in jedes nicht-schraffirte Dreieck über. Jedes schraffirte Dreieck ist also im Sinne der Cayley'schen Maassgeometrie mit

jedem schraffirten direct, mit jedem nicht-schraffirten invers congruent. Durch diese Formulirung wird die Symmetrie unserer Figur viel schärfer gekennzeichnet, als es ohne dieselbe möglich war. Unsere Figur ist in der Cayley'schen Maassbestimmung eine reguläre Gebietseinteilung, ebenso gut wie es etwa ein Schachbrett in der gewöhnlichen Maassbestimmung ist. Insbesondere haben alle Dreiecke unserer Figur die gleichen Winkel, nämlich 60°, 90° und da, wo sie an die Peripherie des Kegelschnitts heranragen, 0°.

Wir kommen nun speciell auf die geometrische Bedeutung der Automorphien zurück, wobei wir die pag 265 unterschieden Fälle einzeln betrachten. Die Automorphien des Falles 1. und 2. sind Bewegungen, die des Falles 3. und 4. Umlegungen, bei denen ein vorgegebener Punkt (a, b, c) festbleibt. Die Automorphien des Falles 1. und 2. werden wir daher als Drehungen, den Punkt a, b, c im Falle 1. als Dre-

hungscentrum anzusprechen haben.

Im Falle 1. bleiben auch die Berüh-
rungspunkte der von a, b, c an den
fundamentalen Kegelschnitt gezogenen
Tangenten für sich fest. Da wir somit
die sämmtlichen 3 Fixpunkte der betr.
Collineation (nämlich diese beiden Be-
rührungspunkte und den Punkt a, b, c
selbst) kennen, so können wir uns in
der nebenstehenden Zeichnung ein
Bild von der
durch sie be-
wirkten Um-
formung ma-
chen. Nach
den Elemen-
ten der pro-
jectiven Geo-
metrie bildet
jede Gerade



durch den Punkt a, b, c mit den bei-
den festen Tangenten und der durch
die Collineation aus ihr hervorgehen-
den Geraden ein Doppelverhältnis,
welches unabhängig von der Aus-

wahl der Geraden ist. Im Sinne der Cayley'schen Maassbestimmung können wir dies so ausdrücken: Jede Gerade durch a, b, c wird vermöge der Collineation um einen constanten Winkel gedreht.

Die Grösse dieses Winkels hängt aufs Einfachste mit dem Pell'schen Winkel zusammen. Führen wir für den Augenblick solche Dreiecks-Coordinaten x_1, x_2, x_3 ein, dass die Gleichungen der beiden Tangenten lauten $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$, die Gleichung ihrer Berührungssehne $x_2 = 0$, so können wir unsere Collineation in der Form anschreiben:

$$\varrho x_1' = \lambda x_1, \quad \varrho x_2' = x_2, \quad \varrho x_3' = \mu x_3.$$

Nun wird aber die Gleichung des fundamentalen Kegelschnittes, folgende Gestalt haben $x_2^2 - K x_1 x_3 = 0$, wo K irgend einen Werte hat, den man durch Annahme des Einheitspunktes noch beliebig fixiren kann. Da unsere Collineation diesen Kegelschnitt in sich transformiren soll, so folgt, dass $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Betrachten wir eine beliebi-

ge Gerade $x_1' + r x_3' = 0$ durch den Punkt a, b, c; dieselbe geht bei unserer Collineation über in $\frac{x_1'}{\lambda} + r\lambda x_3' = 0$. Das Doppelverhältnis der 4 Geraden

$$x_1' + r x_3' = 0,\ x_1' + r\lambda^2 x_3' = 0,\ x_1' = 0,\ x_3' = 0$$

wird nun ersichtlich gleich λ^2, der Cayley'sche Drehungswinkel also gleich $i \lg \lambda$.

Wollen wir diesen Winkel in den Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausdrücken, so bemerken wir, dass λ^2 derjenige Factor ist, mit welchem sich der Quotient aus den linken Seiten der Tangentengleichungen $x_1' = 0, x_3' = 0$ bei der Transformation multiplicirt. Wir haben nämlich $\frac{x_1'}{x_3'} = \lambda^2 \frac{x_1}{x_3}$. In den früheren Coordinaten lauten die Gleichungen der Tangenten $x_1' = 0$ und $x_3' = 0$ nach pag 182 folgendermassen: $A w_1^2 + B w_1 + C = 0$ und $A w_2^2 + B w_2 + C = 0$, (wo wir die laufenden Coordinaten zur Unterscheidung von den Coordinaten a, b, c des festen Poles durch grosse Buchstaben bezeichnet haben). Wir wollen hier noch die

Wurzeln Λ_1, Λ_2 der Gleichung:

$$A\Lambda^2 + B\Lambda + C = 0$$

einführen. Dann werden die Gleichungen unserer Tangenten:

$(\Lambda_1 - \omega_1)(\Lambda_2 - \omega_1) = 0$ bez. $(\Lambda_1 - \omega_2)(\Lambda_2 - \omega_2) = 0$;

der Ausdruck, dessen Verhalten wir bei der Pell'schen Substitution untersuchen sollen, ist daher:

$$\frac{(\Lambda_1 - \omega_1)(\Lambda_2 - \omega_1)}{(\Lambda_2 - \omega_2)(\Lambda_2 - \omega_2)}$$

Aber die Pell'schen Substitution schreibt sich in dem Parameter Λ nach pag 144 folgendermassen:

$$\frac{\Lambda - \omega_1}{\Lambda - \omega_2} = \left(\frac{t + u\sqrt{D}}{2}\right)^2 \frac{\Lambda' - \omega_1}{\Lambda' - \omega_2}.$$

Indem wir diese Formel gleichzeitig auf Λ_1 wie auf Λ_2 anwenden, erhalten wir:

$$\frac{(\Lambda_1 - \omega_1)(\Lambda_2 - \omega_1)}{(\Lambda_1 - \omega_2)(\Lambda_2 - \omega_2)} = \left(\frac{t + u\sqrt{D}}{2}\right)^4 \cdot \frac{(\Lambda_1' - \omega_1)(\Lambda_2' - \omega_1)}{(\Lambda_1' - \omega_2)(\Lambda' - \omega_2)}.$$

Der Factor, mit dem sich bei der Pell'schen Substitution der Quotient unserer Tangentengleichungen multiplicirt, ist daher

$$\lambda^2 = \left(\frac{t + u\sqrt{D}}{2}\right)^4 .$$

Mithin wird

$$i \lg \lambda = 2i \lg \frac{t + u\sqrt{D}}{2} ;$$

dieses ist aber das Doppelte derjenigen Grösse, welche pg 145 als Pell'scher Winkel definirt wurde. Der Cayley'sche Winkel ist also einfach gleich dem Doppelten des Pell'schen Winkels.

Die Hauptpunkte der Pell'schen Theorie aber drücken sich in der Sprache der Cayley'schen Maassbestimmung folgendermassen aus: Es gibt in unserer Gruppe zu jedem rationalen Centrum a, b, c unendlich viele Drehungen; dieselben setzen sich aus einer kleinsten durch fortgesetzte Wiederholung zusammen; die zugehörigen Drehungswinkel werden berechnet, indem man die sämtlichen Wurzeln der Pell'schen Gleichung benutzt.

Zum Vergleich ziehen wir noch die Automorphien der definiten Formen heran. Wir haben zwei Arten derselben zu unterscheiden, solche von der Periode 2 und solche von der Periode 3. Die ersten gehörten zu Formen, welche in den Mittelpunkten der Dreiecks kanten, die letzteren zu Formen, welche in den Mittelpunkten der Dreiecksflächen ihre repräsentirenden Punkte hatten.

Auch diese Automorphien sind im Sinne unserer Maassbestimmung Drehungen. Der Drehungswinkel beträgt beziehungsweise 180° und 120°.

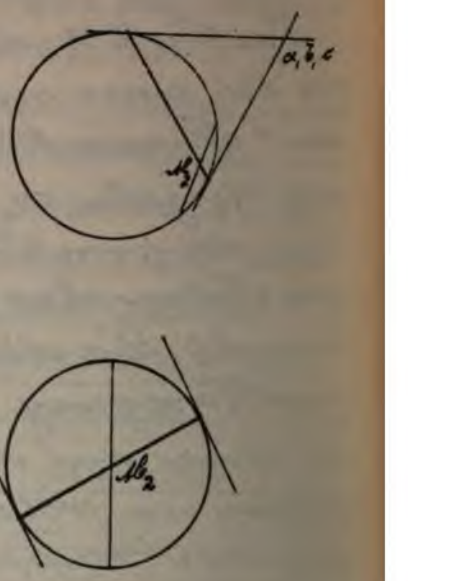
Wir können die Drehungsmittelpunkte der ersten Art als H_2, die der zweiten als H_3 bezeichnen. Diese Punkte liegen discontinuirlich im Innern des Kegelschnittes zerstreut. In demselben Sinne werden wir alle rationalen Punkte ausserhalb des Kegelschnittes (und ebenso die rationalen Punkte auf dem Rande desselben) als H_∞ bezeichnen können, weil sie Centren für Cayley'sche Drehungen

von unendlich hoher Periode, d. h. für aperiodische Drehungen sind. Dieselben erfüllen das Aeussere (und den Rand) des Kegelschnittes überall dicht.

Der Fall 2. der Automorphien trat ein bei einer mit sich selbst „inversen" Formenklasse. Dabei wurden die Wurzeln ω_1 und ω_2, d. h. die Enden der zum Punkte a, b, c gehörigen Polarsehne gegen einander vertauscht. Da diese Vertauschung durch eine Bewegung der Ebene geschieht, so muss auf der Sehne ein Punkt liegen, in welchem eine Collineation unserer Gruppe u. zw. eine Collineation von der Periode 2 ihren Fixpunkt hat. Die Sehne muss daher durch einen der Punkte M_2 hindurchgehen.

Um auch ein arithmetisches Kriterium für diesen Fall der Automorphien hinzuzufügen, bemerken wir, dass durch den Punkt M_2 der Polaren nothwendig eine Elementarsehne erster Art oder

Dreiecksfigur hindurchgeht. Diese Elementarsehne können wir durch eine Collineation unserer Gruppe in die Mittellinie der Figur transformiren, wobei der Punkt M_2 in den Punkt M_2 der Mittellinie, also in den Punkt mit den Coordinaten $b=0$, $a=c$ übergeht. Gleichzeitig wird dabei unsere Form (a, b, c) in eine reducirte Form (A, B, C) verwandelt, (weil ihre Polare nach der Transformation die Mittellinie im zugehörigen Punkte M_2 schneidet). Die Gleichung der Polaren des reducirten Punktes $Bb - 2Ac - 2Ca = 0$ muss hiernach erfüllt sein, wenn wir für a, b, c speciell die Coordinaten dieses



Punktes M_2 eintragen. Es muss also sein

$$A + C = 0.$$

Dieses die gesuchte arithmetische Bedingung für das Eintreten des 2ten Falles der Automorphien. Man erkennt unmittelbar, dass diese Bedingung nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend ist. Hiermit haben wir den Satz:

Soll eine Form mit sich selbst invers (d.h. mit ihrer inversen eigentlich aequivalent) sein, so muss in der Kette der reducirten Formen eine solche Form vorhanden sein, deren erster und letzter Coefficient entgegengesetzt gleich sind.

Wir kommen zu den Fällen 3. und 4. Hier handelt es sich um Substitutionen von der Determinante -1. Wir bezeichneten unter ihnen diejenigen Operationen, bei denen eine Sehne unserer Dreiecksfigur ungeändert bleibt, als Spiegelungen

in einem übertragenen Sinne, während nur die Spiegelungen an den Durchmessern unserer Figur im Sinne der elementaren Maassbestimmung wirkliche Spiegelungen waren. Vom Standpunkte der Cayley'schen Maassbestimmung sind alle diese Operationen wirkliche Spiegelungen, d. h. Umformungen, bei denen jede gegebene Figur in eine invers congruente umgewandelt wird. Wir mögen noch die Elementarsehnen erster und zweiter Art bez. die an ihnen stattfindenden Spiegelungen als S' und S'' unterscheiden.

Im Falle 3. der Automorphien handelt es sich um eine Spiegelung, welche die Endpunkte w_1, w_2 der Polarsehne von (a, b, c) vertauscht, wobei die Polarsehne in sich transformirt wird. Sie muss alsdann durch das Centrum der Spiegelung hindurchgehen. Gleichzeitig geht dann die Axe der Spiegelung, welche Polare des Centrums ist, durch den Pol

unserer Sehne, d. h. durch den Punkt (a, b, c) hindurch. Die Axe der Spiegelung kann aber, da es sich um eine Operation unserer Gruppe handelt, nur eine Elementarsehne erster oder zweiter Art sein. Der Punkt (a, b, c) muss daher auf einer der Geraden S' oder S'' liegen.

Um hieraus wieder ein arithmetisches Kriterium für das Eintreten des Falles 3) abzuleiten, bemerken wir, dass wir jede S' in die Mittellinie $b = 0$, jede S'' in die Seite $a = b$ des reducirten Dreiecks durch eine unserer Collineationen verwandeln können. Die Form (a, b, c) geht dabei in eine nothwendig reducirte Form über, für welche im einen oder andern Falle entweder $B = 0$ oder $A = C$ ist. In beiden Fällen sprechen wir von einer Ancepsform. Die Automorphien des Falles 3) treten also bei den Ancepsklassen auf, d. h. dann, wenn sich in der Kette der reducirten Formen entweder eine Form befindet mit

$A = C$ oder eine solche mit $B = 0$.

Im Falle 4) endlich handelt es sich um eine Umlegung der Ebene, bei der die Wurzeln w_1, w_2 in der Gleichung $aw^2 + bw + c = 0$ ungeändert bleiben. Hieraus werden wir gerade so, wie auf pg. 141 Bedingungen für die Coefficienten $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ der Substitution ableiten können. Dieselben drücken sich ebenso wie dort mit Hülfe zweier ganzer Zahlen t und u aus, zwischen denen jetzt, da die Determinante der Substitution gleich -1 ist, die Gleichung besteht $t^2 - Du^2 = -4$. Diese Gleichung heisst die <u>ausserordentliche Pell'sche Gleichung</u>. Um das Vorhandensein von Automorphien des Falles 4. zu entscheiden, sind wir auf die Untersuchung dieser Gleichung angewiesen, über deren Lösungen im allgemeinen nichts ausgesagt werden kann. Wir müssen uns darauf beschränken, Tabellen zu citiren, in denen immer die kleinste Lösung dieser Gleichung ange-

geben wird (falls Lösungen überhaupt vorhanden sind) nämlich:

Legendre: Théorie des nombres Bd I Tab. X (der deutschen Ausgabe).

Cayley: Gesammelte Werke Bd. IV pg 40.

Nennen wir die betr. kleinste Lösung t_0, u_0' und bilden uns die complexe Zahl $t_0' + u_0' \sqrt{D}$, so erhält man aus ihr die sämmtlichen Lösungen der beiden Pell'schen Gleichungen $t^2 - Du^2 = \pm 4$, indem man $\frac{t + u\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_0' + u_0' \sqrt{D}}{2}\right)^\nu$ setzt und ν alle ganzen, positiven und negativen Zahlen durchlaufen lässt. Die geraden ν ergeben dabei die Lösungen $t^2 - Du^2 = +4$, die ungeraden ν diejenigen von $t^2 - Du^2 = -4$.

Leipzig d. 7. II. Nachdem wir unsere Dreiecksfigur für die Reduction der einzelnen indefiniten Form verwertet haben, bleibt jetzt noch die abschliessende Frage zu besprechen nach der Gesammtheit der reducirten Formen einer Klasse. Von

Seiten der Zahlentheorie wissen wir darüber, dass die reducirten Formen eine Kette von unendlicher Gliederzahl bilden, die aperiodisch ist, falls nicht gerade die a, b, c commensurable Zahlen sind. In geometrischer Hinsicht möchte man nun erfahren: Wie verteilen sich die repräsentirenden Punkte auf das reducirte Gebiet? Nach einem bekannten Grundsatze von Weierstrass müssen unendlich viele Punkte mindestens eine Häufungsstelle haben. Man wird also vor Allem fragen: wo liegen die Häufungsstellen etc.? Diese interessanten Fragen sind bisher gänzlich unerledigt.

Nur eine negative Aussage lässt sich ohne Weiteres hierüber geben: Es ist nicht möglich das Aeussere des Kegelschnittes so in Fundamentalbereiche zu zerlegen, dass keine zwei Punkte des einzelnen Bereiches aequivalent sind. Dass dieses im Innern des Kegelschnitts möglich war, lag daran, dass die Fixpunkte

te H_2 u. H_3 der Collineationen im Innern des Kegelschnittes einen endlichen Abstand von einander haben. In Folge dessen legen sich hier die Fundamentalbereiche, indem jeder an einen Punkt H_2 und einen Punkt H_3 heranreicht, als Gebiete endlicher Ausdehnung an einander. Der Winkel, mit dem sich der Bereich an seinen Punkt H_2, bezw. H_3 heranzieht, ist der zugehörige Pell'sche Winkel, d. h. 180°, bezw. 120°. Dies ist ersichtlich nothwendig. Nun wissen wir aber, dass im Aeusseren des Kegelschnittes jeder rationale Punkt Fixpunkt einer Collineation ist, und dass die rationalen Punkte die Ebene überall dicht überdecken. Der gesuchte Fundamentalbereich müsste sich daher an jeden seiner rationalen Punkte mit einer Ecke heran ziehen, deren Winkel durch den Pell'schen Winkel der betr. Automorphie bestimmt ist. Wir würden so zu

einem Bereiche kommen, der unserer Raumvorstellung absolut unzugänglich ist und welcher das Gegenteil von einer continuirlichen Gebietsüberdeckung darstellt. Es ist noch eine offene Frage, wie man die vorliegenden zahlentheoretischen Ergebnisse hinsichtlich der indefiniten Formen in ihrer Gesammtheit geometrisch aufzufassen hat.

Dabei liegen die Verhältnisse ausserhalb des Kegelschnittes auch durchaus anders, als es auf der Peripherie desselben der Fall ist. Auf der Peripherie waren die sämmtlichen Klassen aequivalenter Punkte, wie wir sahen, überall dicht verteilt. Das findet ausserhalb nicht mehr statt. Denn beispielsweise gibt es zu jedem rationalen Punkte ja nur eine endliche Anzahl aequivalenter Punkte. In gewisser Hinsicht sind also hier die aequivalenten Punkte sogar ausserordentlich dünn verteilt.

Wir wollen das vorliegende Re

lem noch in abstracterer Weise aussprechen. Wir wollen nämlich allgemein fragen: Ist es möglich die Classen oder indefiniten Formen irgendwie in der Ebene zu lokalisiren? (so dass jeder Classe ein einziger repräsentirender Punkt zugewiesen wird).

Eine Classe indefiniter Formen ist vollkommen bestimmt durch eine Reihe von ganzen Zahlen

$$\ldots (a_{-2}, (a_{-1}, (a_0, (a_1, (a_2, \ldots -,$$

welche wir uns als Seitenlängen eines Umrisspolygons (im Gitter) oder als Winkelöffnungen einer Strickzackline (innerer Dreiecksfigur) vorstellen mögen. Zwei Formen sind aequivalent, wenn ihre zugehörigen Zahlenreihen identisch ausfallen, wobei die Reihen natürlich noch gegeneinander verschoben sein können. Es käme nun darauf an, die Gesamtheit dieser Zahlenreihen in übersichtlicher Weise geeigneten Punkten einer Ebene zuzuordnen. Wir kommen so auf ein Problem von viel mehr arith-

metrischem als geometrischem Charakter, welches an die Ideen der Cantor'schen Mengenlehre erinnert. Welches ist der durch die Natur der Sache gegebene „Ordnungstypus" der von unseren Zahlenreihen gebildeten Menge?

Zum Abschlusse werden wir sagen müssen, dass die Theorie der indefiniten Formen viel und schwieriger aber auch interessanter ist, als die der definiten Formen, weil sie auf noch unerledigte Fragestellungen führt. Aber eben deshalb müssen wir diese Theorie jetzt verlassen.

Nunmehr kehren wir zu den definiten Formen zurück. Dabei werden wir für den Rest der Vorlesung unserer Betrachtungen ausser auf Zahlentheorie und Geometrie noch auf den dritten Grundpfeiler der mathematischen Gesammtwissenschaft, auf die Functionentheorie, stützen. Wir überschreiben nämlich das folgende Capitel:

Ueber den Zusammenhang der definiten quadratischen Formen mit der Theorie der elliptischen Functionen.

Der Grund dieses Zusammenhanges ruht auf der elementar-geometrischen Vorstellung eines Parallelengitters, zu welchem die quadratischen Formen einerseits und die elliptischen Functionen andrerseits hinführen.

Die Gittertheorie der definiten Formen ist uns von früher bekannt. Wir können dabei unsere Gitter (da es sich ausschliesslich um definite Formen handeln soll) in der gewöhnlichen Maassbestimmung construiren. Wir tragen bei gegebener Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

von einem Punkte o die Strecken Va und Vc unter dem Winkel

$$X = \arccos \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

gegen einander ab. Dabei werden wir gegen früher zweckmässigerweise eine kleine Modification eintreten lassen. Wir legen nämlich die Strecken so, dass Vc durch eine positive Drehung um den Winkel χ in Va übergeht. Diese Festsetzung hat das Unbequeme, dass in der Folge die x- und y- Axen die umgekehrte Lage haben werden, wie gewöhnlich; sie ist aber nothwendig, wenn wir mit den üblichen Bezeichnungen aus der Theorie der elliptischen Functionen in Uebereinstimmung sein wollen.

An das erste Parallelogramm setzen wir fortgesetzt congruente an; die Ecken dieser Parallelogramme haben zu Coordinaten x und y ganze Zahlen. Der Werth der Form f im Punkte x, y wird geometrisch durch die (elementar gemessene) Entfernung $r^2 = ax^2 + bxy + cy^2$ gegeben. Die Form f lösen wir in zwei conjugirt imaginäre Bestandtheile auf. Dabei können

wir noch dem einen Bestandtheil ei-
ner Proposition alitätsfactor will-
kürlich hinzufügen, vorausgesetzt, dass
wir dem anderen den reciproken Fac-
tor beilegen. Sollen die Bestandtheile
conjugirt imaginär sein, so muss
der Factor die Form haben $= e^{i\varphi}$,
so dass unsere Zerlegung lautet:

$$f = e^{i\varepsilon}\left(\sqrt{a}x + \frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{a}}y\right) e^{-i\varepsilon}\left(\sqrt{a}x + \frac{b-\sqrt{D}}{2\sqrt{a}}y\right).$$

Der einzelne Bestandtheil ist eine
complexe Zahl u. zw. - gerade die-
jenige, welche dem Gitterpunkte x y
in der Gaussischen Ebene zukommt.
Der Factor $e^{i\varepsilon}$ werde als Azimu-
thalfactor bezeichnet, der Winkel ε
bedeutet nämlich dasjenige Azimuth,
unter dem die x-Axe gegen die Axe
der reellen Zahlen in der Gaussi-
schen Ebene geneigt ist. Wir nennen

$$e^{i\varepsilon}\left(\sqrt{a}x + \frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{a}}y\right)$$

eine complexe Gitterzahl. Die
Form f erscheint dabei als Norm
dieses Systems von Gitterzahlen.

Andrerseits führt ein parallelogrammatisches Gitter sofort auf den Begriff der doppelperiodischen Functionen. Die Perioden ω_1, ω_2 derselben sind diejenigen complexen Zahlen, welche den Endpunkten der von 0 ausl laufenden Parallelogrammseiten entsprechen. Die allgemeinste Periode lautet dann, unter x, y ganze Zahlen verstanden $\omega_1 x + \omega_2 y$. Wollen wir ω_1, ω_2 durch die Coefficienten der quadratischen Form ausdrükken, so haben wir

$$\omega_1 = e^{i\varphi} \sqrt{a}$$

$$\omega_2 = e^{i\varphi} \frac{b + \sqrt{D}}{2\sqrt{a}},$$

wie man erkennt, wenn man in dem oben stehenden Ausdrucke der Gitterzahlen $x = 1, y = 0$ bez. $x = 0, y = 1$ einträgt. Wollen wir umgekehrt die quadratische Form durch ω_1 und ω_2 ausdrükken, so berechnen wir die Norm

der allgemeinen complexen Gitter-
zahl oder, was dasselbe ist, die
Norm der allgemeinen Periode

$$w_1 x + w_2 y.$$

Wir erhalten so:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (w_1 x + w_2 y)(\bar{w}_1 x + \bar{w}_2 y).$$

Nun interessirt uns in der Zahlentheo-
rie weniger die einzelne Form als die
ganze Klasse von Formen, welche durch
die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

verbunden sind. Bei dieser Substi-
tution erleiden auch die Perioden
eine Umänderung.

Es wird nämlich

$$w_1 x + w_2 y = (\alpha w_1 + \gamma w_2) x' + (\beta w_1 + \delta w_2) y'.$$

Setzen wir dieses gleich

$$w_1' x' + w_2' y'$$

so haben wir

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= \alpha w_1 + \gamma w_2 \\ w_2' &= \beta w_1 + \delta w_2 \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

Die Perioden erfahren also eine Trans-

formation, welche wir als Transformation erster Ordnung bezeichnen. Sie entsteht aus der vorigen Transformation für die Gittercoordinaten x, y durch blosse Vertauschung von β und γ.

Durch den Vergleich mit der Zahlentheorie werden wir so darauf geführt, diese Transformationen erster Ordnung principiell in die Betrachtung einzuführen und solche Functionen zu suchen, welche nicht nur bei den Substitutionen ungeändert bleiben:

$$u' = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$$

(also schlechtweg doppelperiodisch sind) sondern auch bei den Periodentransformationen

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &\equiv \alpha \omega_1 + \gamma \omega_2 \\ \omega_2' &= \beta \omega_1 + \delta \omega_2 \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

Diese Functionen nennen wir nun elliptische Functionen, so dass die elliptischen Functionen durch die vorstehende ternäre Gruppe definirt sein sollen. Der Inbegriff aller solcher Functionen soll - vorbe-

halblich einer späteren Verschärfung des Begriffes, und unbeschadet späterer Verallgemeinerungen – ein elliptisches Gebilde heissen. Der einzelnen Klasse quadratischer Formen tritt also ein elliptisches Gebilde an die Seite.

Nehmen wir im Speciellen die Coefficienten a, b, c der Form als ganze Zahlen an, so tritt der besondere Fall ein, dass jedesmal eine endliche Anzahl (h) von Klassen zusammengehört, dass sind die Klassen derjenigen Discriminante D. Dementsprechend gibt es dann auch h zusammengehörige elliptische Gebilde. Wir nennen diese Gebilde, – also diejenigen, die zu ganzzahligen quadratischen Formen gehören –, singuläre elliptische Gebilde. Unser besonderes Interesse wird sein, zu untersuchen, wie sich diese singulären Gebilde von den allgemeinen elliptischen Gebilden unterscheiden und wie sich ihre zahlentheoretische Zusammengehörigkeit analytisch aus-

drückt.

Do. d. 13. II. 96. Zu der obigen Definition der elliptischen Functionen fügen wir als erste Einschränkung hinzu, dass die Function in den 3 Grössen u, ω, ω_2 homogen sein soll. Wir verlangen also, dass eine elliptische Function $\mathcal{E}(u, \omega_1, \omega_2)$ der folgenden Functionalgleichung genügen soll:

$$\mathcal{E}(\lambda u, \lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \lambda^r \mathcal{E}(u, \omega_1, \omega_2),$$

in welcher r den gemeinsamen Grad bezeichnet, in welchem jene 3 Grössen vorkommen. Wir haben es daraufhin nicht sowohl mit Functionen, sondern specieller mit „Formen" zu thun. Diesem Umstande wollen wir in der Bezeichnung Rechnung tragen; wir wollen, falls $r \geq 0$ ist, von elliptischen Formen sprechen und wollen als elliptische Functionen nur diejenigen bezeichnen, für welche $r = 0$ ist.

In Folge der verabredeten Homogenität können wir übrigens unsere

3 Argumente auf 2 reduciren. Dividiren wir nämlich unsere Form r^{ten} Grades $\mathfrak{C}(n, \omega_1, \omega_2)$ durch ω_2^r und führen wir die neuen Grössen $v = \frac{u}{\omega_2}$ und $w = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ein, so haben wir

$$\mathfrak{C}(v, w, 1) = \frac{1}{\omega_2^r}\ \mathfrak{C}(n, \omega_1, \omega_2).$$

Die Gleichung

$$\mathfrak{C}(n+m, \omega_1 + m_2\omega_2, \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \mathfrak{C}(n, \omega_1, \omega_2),$$

welche die Invarianteneigenschaft der elliptischen Formen ausspricht, nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{C}\left(\frac{v+m_1\omega_1+m_2\omega_2}{\gamma\omega+\delta}, \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, 1\right) = \left(\frac{1}{\gamma\omega+\delta}\right)^r \mathfrak{C}(v, \omega, 1).$$

Wir werden jedoch von dieser inhomogenen Schreibweise im Allgemeinen keinen Gebrauch machen, weil, wie schon die vorstehende Gleichung zeigt, der Vorteil, mit zwei Variabeln auszukommen, nur durch Aufgebender Symmetrie erkauft wird. Nur wenn das v gar nicht vorkommt, wenn wir also

eine sog. elliptische Modulfunction oder Modulform haben, werden wir auf die vorstehende Gleichung wiederholt zurückkommen.

Zunächst wollen wir die einfachsten Repräsentanten der elliptischen Transformationen aufstellen. Wir stellen uns also die Aufgabe, Invarianten unserer ternären Gruppe aufzufinden. Allgemein wird man dieses folgendermassen bewerkstelligen: Man geht von irgend einem Ausdruck in den u, w_1, w_2 aus, transformirt diesen mittelst aller Substitutionen der Gruppe und bildet eine symmetrische Function aller so erhaltenen Ausdrücke. Ist die Gruppe eine endliche, so hat dieses keine Schwierigkeit. Ist aber, wie in unserm Falle, die Gruppe unendlich, so muss man die Convergenz im Auge haben.

Gehen wir speciell von einer Potenz von u aus, u^r, so erhalten wir nach dem angegebenen Verfahren eine Invariante der Gruppe in dem folgen-

den Ausdruck:

$$\sum_{(m_1, m_2)} (u - m_1 w_1 - m_2 w_2)^{-r},$$

wo m_1, m_2 alle Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen. In der That erkennt man, dass bei sämmtlichen Substitutionen unserer Gruppe die Glieder der Reihe nur untereinander verstellt werden. Ausserdem ist dieser Ausdruck homogen vom $r$ten Grade. Der Convergenz wegen aber müssen wir festsetzen, dass $r \leqq -3$ genommen werde (vergl. die folgenden Ausdrücke für p', g_2 und g_3). Soll aber $r > -3$ genommen werden, so müssen wir die Reihe erst durch Hinzufügung passender Glieder convergent machen. (vergl. die folgende Gleichung für p). In diesem Sinne ist die Darstellung der elliptischen Functionen von Eisenstein begonnen und von Weierstrass weiter ausgebildet worden. Die fundamentalen Functionen der Weierstrassischen Theorie sind die folgenden:

$$\wp(u, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} \right],$$

$$\wp'(u, \omega_1, \omega_2) = -2 \sum \frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^3},$$

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \cdot \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4},$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}.$$

Diese Ausdrücke sind in unserer Terminologie elliptische Formen vom 0 czw. $-2, -3, -4, -6^{\text{ten}}$ Grade. Es zeigt sich, dass man die ähnlich gebildeten Summen von kleinerem n auf die vorstehenden zurückführen kann.

Zwischen $\wp$, $\wp'$, g_2 und g_3 bestehen die folgenden Relationen:

$$\wp' = \frac{d\wp}{du}, \quad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Aus g_2 und g_3 bilden wir noch eine weitere wichtige elliptische Form Δ, welche in der Weierstrassischen Theorie zurücktritt und nur gelegentlich unter der Bezeichnung G vorkommt. Man wird auf dieselbe

geführt, wenn man die rechte Seite der letzten Gleichung in Factoren zerlegt:

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 4(p-e)(p-e_2)(p-e_3)$$

und die Discriminante der Gleichung

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 0$$

bildet. Die neue Grösse Δ ist bis auf einen Zahlenfactor gleich dieser Discriminante:

$$\Delta = 16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2 = g_2^3 - 27g_3^2 = 16G.$$

Hiernach wird Δ eine elliptische Form vom Grade 12. Endlich bilden wir noch eine elliptische Function (Form 0ter Grades) oder, wie man in der Invariantentheorie sagt, eine absolute Invariante, indem wir setzen:

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \text{ oder was dasselbe ist:}$$

$$J-1 = \frac{27g_3^2}{\Delta}.$$

Unsere bisherige Definition der elliptischen Functionen, als Invarianten der ternären Gruppe, welche in ihren 3 Argumenten homogen sind, war

nur eine vorläufige. Wir bemerken nämlich, dass unter jene Definition auch Functionen fallen, welche als Functionen von u, ω_1, ω_2 alle möglichen Arten von Singularitäten haben. Wollen wir dieses ausschliessen, so müssen wir unsere Definition verengern. Wir sagen daher jetzt: Wir verstehen fortan unter einer elliptischen Function nur eine rationale Function von p, p', p_2 und g_3, welche überdies der Homogenitätsregel Genüge leistet. (Dass eine solche Function auch die oben geforderte Invarianteneigenschaft besitzt, versteht sich von selbst).

Dementsprechend verengern wir auch die frühere Definition des elliptischen Gebildes: Wir verstehen fortan unter dem elliptischen Gebilde die Gesamtheit der rationalen Functionen von p, p', g_2, g_3.

Dieser Begriff deckt sich daher mit dem Begriffe eines Rationalitätsbereiches. In unserem Falle ist der

Rationalitätsbereich festgelegt durch die Grössen p, g_2, g_3 zu welchen noch die Grösse p' als Wurzel der Gleichung $p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$ adjungirt ist.

Wir werden jedoch neben dieser indirecten Definition der elliptischen Functionen eine independente Definition fordern, welche nicht auf die Darstellung derselben durch die p und p' .... zurückgreift. Zu dem Zwecke müssen wir uns zunächst die Bedeutung des Periodenparallelogramms noch klarer machen.

Das Periodenparallelogramm war ursprünglich vom gruppentheoretischen Standpunkte definirt. Es war der Inbegriff aller nichtaequivalenter Punkte der u-Ebene, d. h. derjenigen Werte, welche durch keine Substitution $u' = u + m_1 w + m_2 w_2$ zusammenhängen. Das Periodenparallelogramm misst sonach die Discontinuität der Gruppe, es ist ihr Discontinuitätsbereich.

Betrachten wir es jetzt vom functionentheoretischen Standpunkt: In dieser Hin-

sieht wissen wir, dass eine doppelperiodische Function φ, welche zu dem Periodenparallelogramm gehört, in jedem Parallelogramm der Gitterteilung genau dieselben Werte annimmt, wie in jedem anderen. Das Periodenparallelogramm erschöpft also alle Werte, deren die Function φ fähig ist; es stellt ihren Fundamentalbereich dar.

Die beiden Begriffe: Discontinuitätsbereich der Gruppe = und = Fundamentalbereich der doppelt periodischen Functionen fallen eben nothwendig zusammen.

Eine weitere Frage wird sein, wie oft eine doppelperiodische Function einen vorgegebenen Werte im Fundamentalbereiche annimmt. Man überzeugt sich insbesondere, dass p jeden Werth an 2 Stellen, p' jeden Werth an 3 Stellen des Periodenparallelogramms annimmt. Man zeigt ferner, dass das Wertepaar (p, p') jeden Wert im Periodenparallelogramm nur an einer Stelle annimmt (wobei natürlich nur solche Werte in Betracht kommen, rel.

sie vermöge der Relation

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$$

überhaupt möglich sind)

Wenn wir das Wertepaar p, p' betrachten wollen, so werden wir uns die Abhängigkeit von p und p' durch eine Riemann'sche Fläche vorstellen u. zw. können wir entweder über der p-Ebene, den zwei zugehörigen Werten von p' entsprechend, eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche construiren, oder über einer p'-Ebene, den 3 Werten von p entsprechend, eine dreiblättrige Fläche ausbreiten. Die eine oder die andere Fläche ist, dem Vorstehenden zufolge, eindeutig auf das Periodenparallelogramm bezogen. Das Periodenparallelogramm ist einfach das conforme Abbild der zwei- (oder drei-) blättrigen Riemann'schen Fläche.

ü. d. 14. II. Jetzt ist es leicht, von der obigen indirecten zu einer directen Definition der elliptischen Functionen überzugehen, d. h. zunächst, soweit die Variable u in Betracht kommt. Indem wir

sagten: die elliptischen Functionen sind rationale Functionen von p und p', characterisirten wir sie durch ihr Verhalten auf der Riemann'schen Fläche (p, p'). Eine rationale Function ist nämlich, functionentheoretisch gesprochen, eine solche, welche nirgends wesentlich singulär ist, oder auch eine solche, welche jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annimmt. Unsere frühere Definition besagt also, dass die elliptischen Functionen auf der Riemann'schen Fläche (p, p') keine wesentlichen Singularitäten haben oder, was dasselbe ist, dass sie jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen erreichen. Diese Eigenschaft überträgt sich nun aber sofort auf das Periodenparallelogramm. Wir können daher, was das u angeht, die folgende independente Definition aufstellen.

Eine elliptische Function ist eine solche homogene Invariante der ternären Gruppe, welche ein Periodenparallelogramm

parallelogramm der u-Ebene keine wesentliche Singularität besitzt oder jeden Werth nur eine endliche Anzahl von Malen annimmt.

Damit ist unsere Definition aber noch nicht vollständig. Die elliptischen Functionen sind doch Functionen von 3 Argumenten u, ω_1, ω_2. Während durch das Vorstehende ihre Abhängigkeit von der Variabeln u präciairt ist, bleiben uns jetzt noch ihre Eigenschaften in den $\omega_1 \omega_2$ zu charakterisiren. Functionen, welche sich betreffs der Variabeln u in der angegebenen Weise verhalten, sind rationale Functionen von p und p'. Die Coefficienten dieser rationalen Functionen hängen ihrerseits von ω_1 und ω_2 ab; sie sind nach unserer obigen Bezeichnung Modulformen $\phi(\omega_1, \omega_2)$ und genügen der Functionalgleichung

$$\phi(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \phi(\omega_1, \omega_2).$$

Diese Gleichung ist aber zur Defi-

nition der Modulformen noch nicht ausreichend; sie entspricht hinsichtlich der Variabeln w_1, w_2 nur der allgemeinen Forderung, welche wir vorher hinsichtlich der Variabeln u aufsteckten, wonach die elliptischen Functionen in u doppelperiodisch sein sollten. Es müssen viel mehr noch Einschränkungen hinsichtlich des functionentheoretischen Charakters der Modulformen hinzutreten, entsprechend dem Umstande, dass wir vorher in der Variabeln u das Auftreten von wesentlichen Singularitäten im Periodenparallelogramm ausschlossen. Dies geschah bereits oben durch die Festsetzung, dass die elliptischen Functionen auch von den g_2, g_3 rational abhängen sollten. Die Frage muss wieder sein, wie sich diese Bedingung independent ausdrückt, wenn wir w_1, w_2 als unabhängige Variable festhalten. Zu dem Zwecke beschränken wir uns zuvörderst auf Modulfunctionen im engeren Sinne, also auf Modulformen 0ten Grades. Die

selben sind direct Functionen von $\frac{w_1}{w_2} = w$ und genügen als solche nach pg. 303 der Gleichung:

$$\phi(w) = \phi\left(\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}\right).$$

Andrerseits werden sie rationale Functionen nicht nur von g_2, g_3, sondern direct von der absoluten Invariante J sein.

Wir verlegen jetzt die Betrachtung in die Ebene der Variabeln w. Wie zerlegt sich diese Ebene entsprechend den Substitutionen

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$$

in Discontinuitätsbereiche? Wie verhält sich J im einzelnen Discontinuitätsbereiche? Und wie verhält sich eine beliebige rationale Function von J?

Haben wir dieses erledigt, so müssen wir noch ein besonderes Verfahren angeben, um von den Modulfunctionen zu den allgemeineren Modulformen eines von Null verschiedenen Grades aufzusteigen.

Bei der Frage nach dem Discontinuitätsbereiche der w-Ebene knüpfen wir an die Theorie der quadratischen Formen an, womit wir die damals abgeleiteten Resultate jetzt direct benutzen können. Nach pg. 299 oben ist das Periodenverhältnis $w = \frac{w_1}{w_2}$ Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$a w^2 + b w + c = 0.$$

Da a, b, c die Coefficienten einer definiten quadratischen Form sind, werden die beiden Wurzeln conjugirt imaginär. Wir schreiben deshalb $D = -\Delta$ und bezeichnen die Wurzel mit positivem bez. negativem imaginarem Bestandtheil durch w bez. $\bar{w}$:

$$w = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \bar{w} = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Wir betrachten jetzt die Ebene a : b : c und die w Ebene neben einander. Nach den vorstehenden Formeln gehört zu jedem Punkte der ersteren Ebene ein Punktepaar der zweiten Ebene. Setzen wir $w = x + iy$ und entsprechend $\bar{w} = x - iy$, so dass

x und y rechtwinklige Coordinaten in der w Ebene bedeuten, so bestimmt sich die Lage unseres Punktepaares durch die Gleichungen:

$$X = \frac{-b}{2a} \quad , \quad y = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Die beiden Punkte des Paares sind hiernach reell nur dann, wenn $\Delta > 0$, wenn also der Punkt a, b, c im Innern des fundamentalen Kegelschnitts liegt; sie fallen zusammen, wenn a, b, c auf den Rand rückt, sie werden imaginär, wenn der Punkt a, b, c sich ausserhalb des Kegelschnittes befindet.

Umgekehrt gehört zu jedem Punkte der w-Ebene ein bestimmter Punkt der Ebene a, b, c. Berechnet man nämlich nach den vorstehenden Formeln $X^2 + y^2$, so ergibt sich $X^2 + y^2 = \frac{c}{a}$, worauf man die folgende Proportion aufschreiben kann:

$$a : b : c = 1 : -2X : X^2 + y^2.$$

Dieselbe zeigt in der That, dass dem Punkte X, y ein ganz bestimmter Punkt $a : b : c$ entspricht. Die Beziehung

zwischen der w-Ebene und der a, b, c-Ebene, so können wir sagen, ist eine ein-zweideutige Verwandtschaft.

Nun sind uns die Discontinuitätsbereiche in der a, b, c-Ebene, welche die Gruppe der $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$ Collineationen entwirft, wohlbekannt. Da wir ferner auch den Zusammenhang der a, b, c-Ebene mit der w-Ebene kennen, so werden wir jetzt die Gestalt der Discontinuitätsbereiche aus jener in diese Ebene umsetzen können. Hierzu dienen folgende Bemerkungen:

1. Dem fundamentalen Kegelschnitt der a, b, c-Ebene entspricht die reelle Axe der w-Ebene; denn $D = 0$ ergibt nach pag. 317 $y = 0$.

2. Den Geraden der a, b, c-Ebene entsprechen in der w-Ebene Kreise, welche ihren Mittelpunkt auf der reellen Axe haben und diese also senkrecht schneiden, denn aus der Gleichung $Aa + Bb + Cc = 0$ entsteht vermöge der obigen Proportion:

$$A - 2Bx + C(x^2 + y^2) = 0.$$

3. Den $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$-Collineationen in der Ebene $cv: 6: c$, welche den fundamentalen Kegelschnitt in sich transformiren, entsprechen in der w-Ebene Kreisverwandtschaften, welche die reelle Axe ungeändert lassen. Dabei werden Kreise, welche die reelle Axe senkrecht schneiden, in ebensolche übergeführt. U. zw. verschieben Kreisverwandtschaften, welche den Collineationen $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ entsprechen, die reelle Axe gleichstimmig in sich; sie führen die positive w-Halbebene in die positive über, dagegen verschieben diejenigen Kreisverwandtschaften, welche aus den Collineationen $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ hervorgehen, die reelle Axe ungleichstimmig in sich, sie vertauschen die positive mit der negativen Halbebene:

4. Die imaginären Tangenten des fundamentalen Kegelschnittes, welche von den Punkten des Kegelschnitt inneren auslaufen, verwandeln sich in die Minimallinien, welche

von den reellen Punkten der w-Ebene ausgehen. (Wir denken uns hier also vorübergehend die a, b, c und ebenso die x, y der w-Ebene selbst als complexer Werthe fähig). Sei nämlich a_0 b_0 c_0 irgend ein Punkt im Innern des Kegelschnittes. Die Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Tangenten haben Parameterwerte w, welche der Gleichung genügen $a_0 w^2 + b_0 w + c_0 = 0$. Sei w_0 eine Wurzel dieser Gleichung, so lautet die Gleichung der zugehörigen Tangente $a w_0^2 + b w_0 + c = 0$, wo a, b, c die laufenden Coordinaten der Tangente sind. Dem variabeln Punkte a, b, c entspreche in der w-Ebene der variable Wert w, wobei $a w^2 + b w + c = 0$. Wir haben ersichtlich: $w = w_0$, oder, wenn wir ausführlich setzen $w = x + iy$, $w_0 = x_0 + i y_0$: $x + iy = x_0 + iy_0$. Hier gelten x, y, wie wir schon andeuteten, selbst als complexer Werte fähig. Unter dieser Voraussetzung haben

wir die Gleichung einer Minimalgeraden der w-Ebene, welche durch den reellen Punkt x_0, y_0 hindurchgeht. Ebenso entspricht der zweiten Tangente im Punkte a_0, b_0, c_0 die zweite Minimalgerade durch x_0, y_0.

5. Der Winkel, unter dem sich zwei Curven in der a, b, c-Ebene schneiden, gemessen im Sinne der Cayley'schen Maassbestimmung, ist gleich dem Winkel, unter dem sich die entsprechenden beiden Curven in der w-Ebene treffen, gemessen im elementaren Sinne. Der Cayley'sche Winkel war definirt durch $\frac{i}{2}$ multiplicirt mit dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die beiden gegebenen Richtungen mit den Tangenten an den fundamentalen Kegelschnitt bilden. Nun ist unsere Beziehung zwischen der a, b, c – und der w-Ebene allerdings keine projective, bei der das Doppelverhältnis schlechtweg unverändert bleibt. Indessen ist im Infinitesimalen eine jede Punkt-

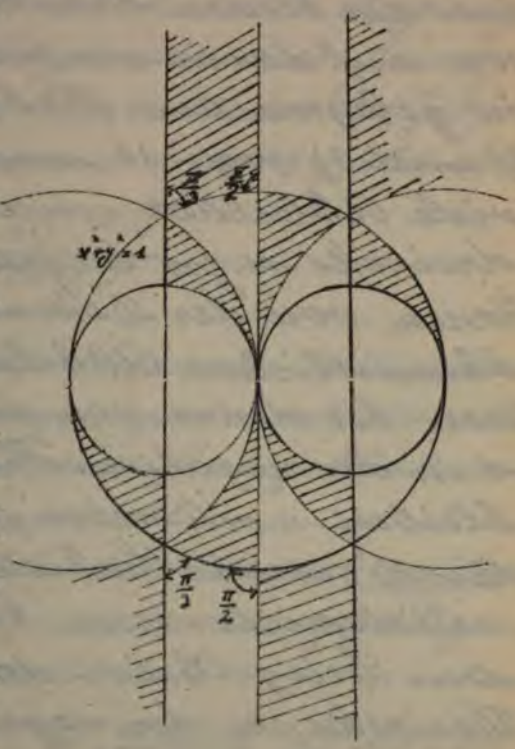
transformation eine projective Bezie-
hung. Bei der Messung des Winkels
kommt es aber nur auf das Verhal-
ten der Linienelemente im Schnitt-
punkte an. Das Doppelverhältnis
jener 4 Richtungen in der a, b, c
Ebene wird daher gleich dem Dop-
pelverhältnis der 4 entsprechenden
Richtungen in der w-Ebene, d. h.
der den gegebenen Curven entspre-
chenden Richtungen und der bei-
den Minimallinien durch ihren
Schnittpunkt. Der Logarithmus die-
ser Grösse ist aber, noch multipli-
cirt mit $i/2$, direct gleich dem
elementar gemessenen Winkel.

Do. d. 20. II. Hiernach ist es leicht, die
ganze Dreiecksfigur aus der a, b, c-
Ebene in die w-Ebene zu übertragen.
Wir grenzen zunächst dasjenige
Gebiet ab, welches dem schraffirten
Elementardreieck des reducir-
ten Raumes aus unserer Dreiecks-
figur entspricht. Dieses hatte zu
Seiten die Geraden a-b, b-c, a-c.

Nach der Proportion von pg 317 sind die entsprechenden Linien der w-Ebene durch die Gleichungen gegeben:

$$X = -\frac{1}{2}\,,\quad X = 0 \text{ und } X^2 + Y^2 = 1\,;$$

sie grenzen in der w-Ebene zwei spiegelbildlich gleiche Kreisbogendreiecke ab, das eine in der positiven, das andere in der negativen Halbebene gelegen. Die elementar gemessene Winkel dieses Kreisbogendreiecks betragen, wie die Figur zeigt, bez. $\pi/3$, $\pi/2$ und 0.



Dieselben Winkel besitzt, wie es sein muss, unser geradliniges Dreieck in der a, b, c-Ebene bei Cayley'scher Maass-

Bestimmung.

Nun entstand die ganze Dreiecksfigur aus dem reducirten Dreiecke dadurch, dass wir auf dieses die Operationen der Gruppe $\alpha S - \beta J = \pm 1$ ausübten. Dieselben Operationen üben wir auf eines der beiden Kreisbogendreiecke, etwa auf das in der positiven Halbebene gelegene aus. Dabei entstehen nach 2) und 3) pag 318 und 319 unendlich viele Abbilder unseres Kreisbogendreiecks u.zw. liegen bei den Operationen von der Determinante +1 die sämmtlichen Abbilder in der positiven, bei denen von der Determinante -1 in der negativen Halbebene. Aber es bleiben noch neben jedem so erhaltenen Dreiecke Gebiete frei.

Beispielsweise können wir zu dem Spiegelbilde des anfänglichen Dreiecks in der negativen Halbebene nicht hingelangen. Überhaupt bleiben alle solche und nur solche Gebiete frei, welche Spiegelbilder der bisher construirten Kreisbo-

gendreiecke in bezug auf die reelle Axe sind. Wir wollen alle bisher construirten Gebiete schraffiren und die bisher frei gebliebenen unschraffirt lassen.

Die Spiegelung an der reellen Axe bedeutet die Operation $x' = x,\ y' = -y$ bez. $w' = \bar{w}$. Setzen wir diese Operation mit einer Operation der $(\alpha\beta)$ Gruppe zusammen, so ergiebt sich:

$$w' = \frac{\alpha\bar{w} + \beta}{\gamma\bar{w} + \delta}.$$

Durch alle Operationen dieser Art wird das Ausgangsdreieck successive in alle bisher frei gebliebenen Gebiete verwandelt.

Wir sprechen von der „erweiterten" Gruppe, wenn wir gleichzeitig die Operationen

I.) $w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, $w = \frac{\alpha\bar{w} + \beta}{\gamma\bar{w} + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$

betrachten. Sie enthält als Untergruppen

II). $w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$

III). $w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, $w' = \frac{\alpha \bar{w} + \beta}{\gamma \bar{w} + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

und als fernere Untergruppe:

IV) $w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

Man bemerke wohl, dass das Wort „erweiterte Gruppe" hier in anderem Sinne gebraucht ist, wie bei den Betrachtungen in der a, b, c-Ebene. Die Erweiterung, welche wir soeben vornahmen, hat in der a, b, c-Ebene keinen Sinn, denn die Operation $x' = x$, $y' = -y$ bedeutet dort, wie aus der Proportion von pg. 317 hervorgeht, einfach die Identität.

Auch die Schraffirung haben wir in der w-Ebene anders eingerichtet, als in der a, b, c-Ebene. Es entsprechen nämlich die schraffirten Gebiete der positiven Halbebene den schraffirten, die schraffirten Gebiete der negativen Halbebene den nicht schraffirten Gebieten der a, b, c-Ebene. Dasselbe gilt für die nicht-schraffirten Gebiete der w-Ebene. Der Grund

für diese Discordanz liegt darin, dass die Beziehung zwischen der a, b, c- und der w-Ebene eine ein-zweideutige Verwandtschaft ist.

Das Resultat dieser Überlegungen ist folgendes: (wegen der genaueren Begründung verweisen wir auf „Hodulf". Bd. I pg 112 und 113):

Unser ursprüngliches Kreisbogendreieck bildet den Discontinuitätsbereich der erweiterten Gruppe (I) für die ganze w-Ebene. Gleichzeitig liefert es den Discontinuitätsbereich der Untergruppe III für die positive Halbebene. Dagegen bildet unser schraffiertes Ausgangsdreieck zusammen mit einem anliegenden nichtschraffierten Dreieck den Discontinuitätsbereich der Untergruppe II für das Gebiet der ganzen Ebene, den der Untergruppe IV für das Gebiet der positiven Halbebene.

Die so eingeteilte w-Ebene wird das geometrische Substrat sein, in welchem wir die elliptischen Mo-

dulfunctionen studiren. Hinsichtlich des hiermit besprochenen Überganges zur w-Ebene bemerken wir jedoch noch Folgendes: An sich wäre es für unsere functionentheoretischen Zwecke gar nicht nötig gewesen, unsere geradlinige Figur in eine Kreisbogenfigur umzusetzen. Es geschieht dieses nur aus Connivenz gegen unsere Gewöhnung, indem wir uns eine complexe Grösse gerne in der Gaussischen Weise durch die rechtwinklichen Coordinaten eines Punktes repräsentirt denken. Im Grunde giebt aber auch unsere Dreiecksfigur eine völlig zureichende geometrische Darstellung des Complexen, da doch jeder complexe Wert von w einem ganz bestimmten Punkte im Innern des Kegelschnittes zugeordnet ist, nämlich demjenigen Punkte, von welchem die Tangente mit dem Parameter w an den fundamentalen Kegelschnitt gelegt werden kann. Wir brauchen uns dieses Innere nur mit zwei Blättern überdeckt zu denken, um

denselben Vortheil zu haben, den wir durch die Unterscheidung der positiven und negativen Halbebene w erreichen. Uebrigens ist dieses doppelt überdeckte Kegelschnittinnere nur ein specieller Fall der allgemeinen zu den ebenen algebraischen Curven gehörigen „projectiven" Riemann'schen Flächen, deren functionentheoretische Verwendung ich längst in Vorschlag gebracht habe. (Cfr. Vorl. über R. Fl. I pg 255).

Wir gehen nun zur Betrachtung der Modulfunctionen über. Zunächst genügt jede Modulfunction $\varphi(w)$ der Functionalgleichung:

$$\varphi(w) = \varphi\left(\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}\right), \text{ wo } \alpha\delta-\beta\gamma = +1.$$

Daraus folgt: <u>Für unsere Modulfunctionen ist jeder Discontinuitätsbereich der Gruppe $\alpha\delta-\beta\gamma = +1$ Fundamentalraum</u>; d. h. die Modulfunctionen nehmen in jedem Discontinuitätsbereich der Gruppe dieselben Werte an, wie in jedem anderen. In's

Besondere nehmen sie auch in correspondirenden Randpunkten desselben Bereiches die gleichen Werte an. Gewöhnlich wählt man unter den sämmtlichen möglichen Fundamentalbereichen den auf der pg 331 gezeichneten aus. Derselbe besteht aus dem schraffirten Ausgangsdreieck von pg. 323 und dem längs der imaginären Axe sich anlegenden Nebendreiecke. Die Zuordnung der Randpunkte ist durch Pfeile angedeutet; sie wird durch die Substitutionen vermittelt $w = w' + 1$ und $w' = -\frac{1}{w}$.

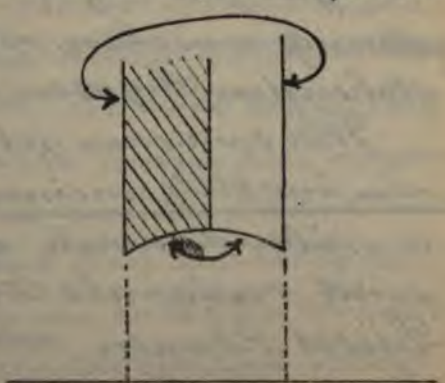
Unter den Modulfunctionen betrachten wir zunächst die Function $J(w)$ genauer. Wir deuten uns ihre Werte in einer J-Ebene und fragen nach der Beziehung zwischen dieser und dem Fundamentalbereich der w-Ebene. Die Theorie der Modulfunctionen lehrt (vergl. K. F I pg 114), dass diese Beziehung eine eindeutig umkehrbare ist, oder, anders ausgedrückt, dass $J(w)$ jeden

seiner Werte im Fundamentalbereiche einmal und nur einmal annimmt.

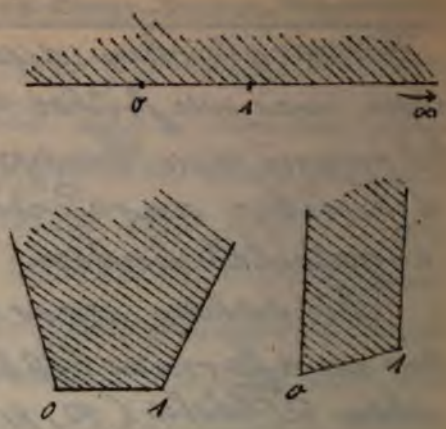
Wir vergleichen dieses Resultat mit dem, was wir früher über den Fundamentalraum der Gruppe $w' = w + m_1 w_1 + m_2 w_2$ d. h. über das Periodenparallelogramm abgeleitet haben.

Wir sahen, dass dieses geradezu ein conformes Abbild der Riemann'schen Fläche (p, p') war. Hier können wir entsprechend sagen: Der Fundamentalraum der w-Ebene ist ein conformes Abbild der schlichten z-Ebene.

Die Dinge liegen also hinsichtlich der Variabeln w im Grunde einfacher, als hinsichtlich der Variabeln u. Speciell zeigt sich, dass das schraffirte Dreieck des Fundamentalbereiches ein conformes Abbild der positiven



J-Ebene ist, wobei den Punkten J = 0, 1, ∞ die Ecken des Kreisbogendreiecks entsprechen, nämlich bez. die Punkte, in denen die zusammenstossenden Seiten die Winkel $\pi/3$, $\pi/2$ und 0 bilden. Wir können nun den Übergang von der positiven J-Ebene zu dem Kreisbogendreieck in der w-Ebene wieder so denken, dass wir ihn als das Resultat einer gesetzmässigen continuirlichen Verzerrung ansehen, wie durch die nebenstehenden Figuren angedeutet wird.



Wir sprechen jetzt von <u>Modulfunctionen im Allgemeinen</u>. Wir definirten diese früher dadurch, dass wir sagten: es sind rationale Functionen von J. Dieses können wir auch so ausdrücken: die Modulfunctionen sind in der J-Ebene eindeutig und haben

nirgends einen wesentlich singulären Punkt. Wir geben nun die in Aussicht genommene independente Definition der Modulfunctionen, indem wir sie in der J- Ebene characterisiren. Wir sagen: Modulfunctionen sind solche eindeutige Functionen von w, welche

1. die Functionalgleichung erfüllen

$$\varphi\left(\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}\right) = \varphi(w),$$

und welche

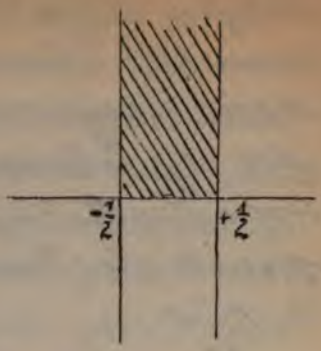
2. im Innern des einzelnen Fundamentalbereiches relativ zu diesem Bereich keinen wesentlich singulären Punkt haben.

Der Ausdruck: relativ zum Fundamentalbereich muss dabei noch näher präcisirt werden. Er soll etwas Anderes bedeuten, wie wenn wir sagen würden: relativ zur w-Ebene: und deckt sich mit ihm nur im Allgemeinen, nämlich nur in solchen Punkten, wo der Fundamentalbereich selbst keine Besonderheiten aufweist. Um seine Bedeutung auch für die

Ecken festzulegen, müssen wir auf die J- Ebene zurückgreifen, in welcher ja die Modulfunctionen schlechtweg keine wesentliche singuläre Stelle haben sollten. Nun bildet sich die Umgebung der Punkte $J=0$ und $J=1$ zwar nicht conform, aber doch mit rationalem Winkelvergrösserungsverhältnis auf die w-Ebene ab. Daraus folgt, dass auch in den Ecken unseres Dreiecks mit den Winkeln $\pi/3$ und $\pi/2$ das Auftreten von wesentlichen Singularitäten relativ zur w-Ebene schlechtweg ausgeschlossen werden muss. Anders verhält es sich mit derjenigen Ecke, welche sich in's Unendliche erstreckt.

Wir fragen zunächst, wie sich J selbst in dieser Ecke verhält; gestattet J hier eine Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{1}{w}$ mit nur einer endlichen Zahl negativer Potenzen? Das ist nicht der Fall, vielmehr hat J, als Function von w, bei $w=\infty$ eine wesentlich singuläre Stelle. Man beherrscht aber diese

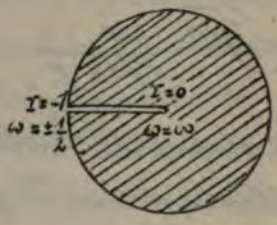
Singularität, indem man die durch Einführung einer neuen Variabelen fortschaffen kann.



Diese Hülfsvariable ist

$$r = e^{2\pi i w},$$

(es ist dieselbe Grösse, welche in der Jacobi'schen Bezeichnungsweise q^2, in der Weierstrass'ischen h^2 heisst.) Was zunächst die Abbildung betrifft, welche in der w-Ebene ensteht, wenn r unter Vermeidung eines von $r=0$ bei $r=\infty$ längs der negativen reellen Axe laufenden Schnittes alle seine Werte einmal durchläuft, so besteht diese aus einem Parallelstreifen, welcher durch die in den Punkten $w = \pm\frac{1}{2}$ parallel zur imaginären Axe gezogenen Geraden begrenzt wird, u.zw. entspricht der in der positiven w-Ebene gelegene Halb-



streifen dem Inneren der in der negativen w-Ebene gelegene Halbstreifen dem Aeusseren des Einheitskreises in der r-Ebene. Das Unendliche des positiven Halbstreifens entspricht dem Mittelpunkte des Einheitskreises, d. h. dem Werte $r = 0$.

Man kann nun $J(w)$ mittelst der Variabeln r in eine Reihe entwickeln, welche folgendermassen lautet (vergl. 16. F. I pg 154):

$$J = \frac{1}{1728\, r} + \sum_{r=0}^{r=\infty} a_r r^r .$$

Aus dieser Reihe erkennen wir zweierlei: erstlich, dass J für $r = 0$ unendlich wird, und zweitens, dass es, als Function von r aufgefasst, nicht wesentlich singulär ist.

Wir verlangen nun von den Modulfunctionen überhaupt, dass sie an der Stelle $w = \infty$, als Functionen von r aufgefasst, nicht wesentlich singulär sein sollen, mithin nach aufsteigenden Potenzen von r entwickelt, nur eine endliche

Anzahl von negativen Potenzen von r besitzen dürfen. Dieses meinen wir, wenn wir sagen: die Modulfunctionen sollen, „relativ zum Fundamentalbereiche", auch an der Stelle $w = \infty$ keine wesentliche Singularität haben. Uebrigens convergirt die angegebene Reihe für J für alle Werthe $|r| < 1$ und gibt damit eine Darstellung des J in der ganzen positiven Halbebene w.

Freiburg, den 21. II. Längs der reellen Axe wird das Verhalten der Modulfunctionen ein sehr eigenthümliches. Wenn wir nämlich unsere Eintheilung der w-Ebene nach der reellen Axe hin vervollständigen wollen, so erkennen wir, dass sich hier die Kreisbogendreiecke unbegrenzt häufen. Daraus folgt, dass die Modulfunction hier jeden Werth unendlich vielen unmittelbar benachbarten Stellen annimmt. Jeder Punkt der reellen Axe wird daher ein wesentlich singulärer Punkt der Function. Man kann die Frage aufwerfen: Welchen Werth nimmt dann eigent-

lich die Modulfunction an einem be-
stimmten Punkte der reellen Axe selbst
an? Dabei müssen wir zwischen den ratio-
nalen und den irrationalen Punkten
unterscheiden. In jeden rationalen
Punkt läuft ein Kreisbogendreieck (und
sogar eine unendliche Zahl solcher Drei-
ecke) je mit einer Spitze aus. Nähern wir
uns einem rationalen Punkt, indem
wir senkrecht auf die reelle Axe zu-
schreiten, so bleiben wir in einem be-
stimmten Fundamentalbereiche, wir
können daher auch von einem bestimm-
ten Werte sprechen, welchen die Modul-
function bei der bestimmten Art der
Annäherung in diesem Punkte an-
nimmt. Dagegen passiren wir, wenn
wir auf einen irrationalen Punkt
in irgend einer Richtung zuschrei-
ten, fortgesetzt neue Dreiecke. Es gibt
daher keinen bestimmten Grenz-
wert, dem die Function in einem
solchen Punkte zustrebt; die Functi-
on bleibt hier völlig unbestimmt.

Dies hat im Sinne der Weierstrass-

schen Functionentheorie zur Folge, dass man die Modulfunctionen über die reelle Axe nicht fortsetzen kann, sie bilden historisch das erste Beispiel einer Function mit „natürlicher Grenze".

Allerdings können wir, wenn uns irgend ein Ausdruck zur Berechnung einer Modulfunction gegeben ist, daraus möglicherweise ebensowohl Werte für ein ω der positiven, wie für eins der negativen Halbebene ableiten. So ist es z. B. für $d = \frac{g_2^3}{\Delta}$, wenn wir für g_2^3 und $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ die oben gegebenen Partialbruchreihen einlegen. Die so entstehenden Werte von J gehören aber im Sinne der modernen Functionentheorie zu zwei ganz verschiedenen Functionen, welche nicht durch analytische Fortsetzung unter einander zusammenhängen. Hiernach stellt das Symbol $J(\omega)$ zwei verschiedene Functionen dar, von denen die eine in der positiven, die andere in der negativen Halbebene definirt ist. Ana-

log ist es mit allen unseren Modulfunctionen. Wir werden weiterhin unter $J(w)$ immer die erstere von beiden verstehen, also voraussetzen, dass $w = \frac{w_1}{w_2}$ einen positiv-imaginären Bestandtheil hat. Dies bringt dann mit sich, dass wir uns auf solche $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ Substitutionen beschränken müssen, deren Determinante $= +1$, denn die anderen vertauschen die beiden Halbebenen a mit einander.

Wir beschäftigen uns nun mit den <u>Modulformen</u>. Diese sollten rationale Functionen von g_2 und g_3 sein, welche homogen sind, wobei wir g_2 das Gewicht -4 und g_3 das Gewicht -6 beizulegen hatten. g_2 und g_3 selbst, sowie die Discriminante Δ sind die einfachsten Modulformen. Ihre Darstellung in den Variabeln w_1, w_2 wurde pag 306 mitgetheilt.

Wenn wir Functionen der beiden unabhängigen Variabeln w_1 und w_2 betrachten wollen, so liegt es zuvörderst nahe, die Variabeln in R

zu deuten. Hinsichtlich der Substitutionengruppe:

$$\begin{aligned} w_1' &= \alpha w_1 + \beta w_2 \\ w_2' &= \gamma w_1 + \delta w_2 \end{aligned}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

zerlegt sich dieser R_4 in eine Reihe von Discontinuitätsbereichen. Es wäre nun die Frage, wie man die Modulformen und ins Besondere, wie man g_2 und g_3 functionentheoretisch durch ihr Verhalten in einem einzelnen dieser Bereiche characterisiren könnte. Dieser directe Weg zum Studium der Modulformen ist indessen bisher nicht mit Erfolg eingeschlagen worden, er scheint erhebliche Schwierigkeiten zu haben. Dasselbe ist aber auch nicht nöthig, da wir nur <u>homogene</u> Functionen von w_1, w_2 suchen. In Folge dessen können wir die ganze Untersuchung indirect in die w-Ebene selbst verlegen. Wir geben zunächst ein Verfahren an, durch welches man von $J(w)$ zu den Formen g_2 und g_3 aufsteigen kann.

Zu dem Zwecke betrachten wir den Differentialquotienten $\frac{d J(w)}{dw}$ und sehen zu, wie sich derselbe bei den Substitutionen $w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$ verhält. Zunächst haben wir die Gleichung:

$$J(w') = J(w).$$

Durch Differentiation folgt, da $\frac{dw'}{dw} = \left(\frac{1}{\gamma w + \delta}\right)^2$ ist:

$$\frac{d J(w')}{dw'} \frac{1}{(\gamma w + \delta)^2} = \frac{d J(w)}{d(w)}.$$

Multiplicieren wir hier mit $\frac{1}{w_2^2}$ und berücksichtigen, dass $w_2' = \gamma w_1 + \delta w_2$, so haben wir

$$\frac{d J(w')}{dw'} \frac{1}{w_2'^2} = \frac{d J(w)}{dw} \cdot \frac{1}{w_2^2}$$

Wir sind somit zu einer Form $C(w_1, w_2) = \frac{dJ}{dw} \frac{1}{w_2^2}$ gekommen, welche homogen vom -2ten Grade in w_1, w_2 ist und welche bei den Substitutionen von pag 341 gänzlich ungeändert bleibt. Dieses C wird daher als Modulform zu bezeichnen sein.

Es gelingt nun, mit Hülfe dieser

Form c und der Function J die anderen Modulformen zusammenzusetzen, wie die folgenden Formeln zeigen:

$$g_2 = \frac{\pi^2}{3J(1-J)}\, c^2$$

$$g_3 = \frac{\pi^3 i}{27 J^2(1-J)}\, c^3$$

$$\Delta = \frac{\pi^4}{27 J^4(1-J)^3}\, c^6 .$$

(vergl. Hierzu H. F. I pg).

Aus diesen Formeln können wir das Verhalten von g_2, g_3 und Δ bei beliebigen Werten von w_1 und w_2 ablesen, wobei wir nur, wie es bei homogenen Variabeln stets geschehen muss, das gleichzeitige Verschwinden sowie das gleichzeitige Unendlichwerden von w_1 und w_2 ausschliessen. Zunächst zeigt sich, dass alle 3 Grössen im Innern der w-Halbebene nirgends unendlich werden. Denn die Werte $J=0$ und $J=1$ sind, wie aus der Lagerung unserer Dreiecksteilung hervorgeht, dreifache bez. zweifache

Werte der Function $J(w)$. Daher verschwindet der Differentialquotient und also auch $\mathfrak{C}(w)$ an diesen Stellen von der zweiten bez. ersten Ordnung. Das Nullwerden des Nenners wird daher bei unseren Ausdrücken für g_2, g_3, Δ durch das Nullwerden des Zählers aufgehoben, ja es bleibt für g_2 und g_3 bei $J = 0, 1$ noch je eine einfache Nullstelle übrig. Man erkennt auch aus der Dreiecksteilung, dass die genannten Stellen (die Ecken der Dreiecksteilung) die einzigen Nullstellen von $\mathfrak{C}(w)$ im Innern der Halbebene sind. Daraus ergiebt sich die folgende Zusammenstellung (N.B. für das Innere der Halbebene):

g_2 wird Null in den Ecken vom Winkel $\pi/3$ und nur in diesen

g_3 " " " " " " vom Winkel $\pi/2$ und nur in diesen

Δ wird nirgends Null.

Zugleich sind sämmtliche Nullstellen von g_2 und g_3 einfache Nullstellen.

Wir orientiren uns ferner über das

Verhalten unserer Formen in den rationalen Punkten der reellen Axe. Dabei können wir uns auf den Punkt $w = \infty$ oder $w_2 = 0$ beschränken, weil jeder andere rationale Punkt $w = \frac{\lambda}{\sigma}$ durch eine Substitution unserer Gruppe nach dem Punkte $w = \infty$ transformirt werden kann, wobei die Modulform ungeändert bleibt. Wir führen, ebenso wie bei der Untersuchung von J im Punkte $w = \infty$ die Hülfvariable $r = e^{2\pi i w}$ ein, man kann dann folgende Reihenentwickelungen aufstellen (vergl. H. F. I pg 153 und 154).

$$g_2 \left(\frac{w_2}{2\pi}\right)^4 = \frac{1}{12} + 20 \sum \frac{m^3 r^m}{1 - r^m}$$

$$g_3 \left(\frac{w_2}{2\pi}\right)^6 = \frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum \frac{m^5 r^m}{1 - r^m}$$

$$\Delta \left(\frac{w_2}{2\pi}\right)^{12} = r \prod' (1 - r^m)^{24}$$

: den 27. II. Die rechten Seiten dieser Ausdrücke können wir uns für die Umgebung der Stelle $w_2 = 0$ oder, was dasselbe ist, der Stelle $r = 0$ in convergente Reihen nach steigenden Po-

tenzen von r umgeordnet denken; wir bezeichnen sie dementsprechend mit $\mathfrak{P}(r)$ und zwar bleiben diese $\mathfrak{P}(r)$ bei $r = 0$ endlich. Dagegen werden die Grössen g_2, g_3, Δ selbst bei der Annäherung an den Punkt $\omega_2 = 0$ unendlich gross u. zw. wird die Art des Unendlich-Werdens allgemein zu reden gemessen durch einen Ausdruck von der Form

$$\left(\frac{2\Pi}{\omega_2}\right)^r \mathfrak{P}(r).$$

Ganz analoges gilt von jedem rationalen Punkte $\rho\omega_1 + \sigma\omega_2 = 0$ auf der reellen Axe, wie wir nicht ausführen, da jeder solche Punkt durch eine Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \rho & \sigma \end{pmatrix}$ nach ∞ geworfen werden kann.

Diese Eigenschaft überträgt sich sofort auf die Modulformen überhaupt, welche ja rationale Funktionen von g_2 und g_3 sein sollten; auch diese verhalten sich bei $\omega_2 = 0$ wie $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \mathfrak{P}(r)$, wo nun aber $\mathfrak{P}(r)$ eine endliche Zahl negativer Potenzen enthalten kann. Für Besondere werden wir die ganzen Modulformen bevorzugen, welche als

ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 definirt sind. Wir sind jetzt in der Lage, dieselben independent durch ihr Verhalten im Fundamentalbereiche zu charakterisiren, ohne auf ihre Darstellung durch g_2 und g_3 zurückzugreifen. Unsere Definition wird lauten:

1. Die ganzen Modulformen $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ sind homogene Functionen von ω_1 und ω_2. (Ihr Grad sei $= r$.)

2. Sie erfüllen die Functionalgleichung:

$$\varphi(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \varphi(\omega_1, \omega_2).$$

3. Sie sind im Innern der positiven ω-Halbebene nirgends singulär, also überall endlich.

4. Sie verhalten sich bei der Annäherung an den unendlich fernen Zipfel des Fundamentalbereiches wie

$$\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \psi(r),$$

wo in $\psi(r)$ nur positive Potenzen von r auftreten.

Umgekehrt schliesst man, dass eine Function, welche diesen Bedin-

gungen genügt, eine ganze rationale Function von g_2 und g_3 ist. Es deckt sich also die neue Definition mit der früheren. Legt man Wert darauf, dass in den Reihenentwickelungen nach x nur ganze Zahlen als Coefficienten auftreten, so wird man nicht die Grössen g_2, g_3 selbst, sondern $f_2 = 12 g_2$ und $f_3 = 216 g_3$ zu Grunde legen. Die Discriminante Δ erfüllt die Forderung ganzzahliger Coefficienten von selbst; sie ist mit f_2 und f_3 durch die Gleichung verbunden: $1728 \Delta = f_2^3 - f_3^2$. Von diesem Standpunkte aus empfiehlt es sich auch statt der absoluten Invariante J die Function $J \cdot \frac{f_2^3}{\Delta} = 1728 J$ einzuführen. Die <u>ganzen ganzzahligen Modulformen</u> im Allgemeinen werden wieder durch die Bedingungen 1) bis 4) definirt, wobei der 4. Bedingung hinzuzufügen ist, dass in der Reihe $f(x)$ nur ganzzahlige Coefficienten auftreten. Man erkennt, dass diese ganzen ganzzahligen Modulformen ganze ganzzahlige Functionen von f_2, f_3 und Δ sind (welch'

letzteres sich hier selbstständig neben f_2 und f_3 stellt, da es sich aus f_2 und f_3 nur mit dem Nenner 1728 zusammensetzen lässt.)

Wir gehen nun auf die Bedeutung der elliptischen Functionen für unsern eigentlichen Gegenstand, für die Zahlentheorie ein. Es handelt sich ausschliesslich um negative Discriminanten. Wir unterscheiden dabei drei Stufen unserer bisherigen arithmetischen Entwickelungen:

1. Auf der obersten Stufe beschäftigen wir uns mit den Gitterzahlen, d.h. mit gewissen complexen Zahlen, welche den Eckpunkten eines beliebigen Parallelgitters in der Gaussischen Ebene zugeordnet sind. Sind w_1 und w_2 diejenigen complexen Zahlen, welche den Endpunkten der von 0 auslaufenden Seiten des ersten Parallelogrammes zukommen, so ist die allgemeine Form der Gitterzahlen

$$w_1 x + w_2 y.$$

Die Bezeichnung wird praktischer Weise von vorneherein so eingerichtet, dass $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ einen positiven imaginären Bestandtheil hat. Da die Definition der Gitterzahlen an die Punkte des Gitters, nicht an die Parallellinien desselben anknüpft, so wird man alle zu demselben Punktgitter gehörige Parallelgitter als gleichwerthig ansehen. Dementspricht dass man alle Grössen ω_1', ω_2' als gleichwerthig ansieht, welche mit ω_1, ω_2 durch die Substitutionen verbunden sind.

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha\omega_1' + \beta\omega_2' \\ \omega_2 &= \gamma\omega_1' + \delta\omega_2' \end{aligned}\right\} (\alpha\delta - \beta\gamma) = +1,$$

wobei wir uns auf die Det. $+1$ beschränken, damit die Verabredung betr. den imaginären Teil von ω aufrecht erhalten bleibt.

2. Auf der zweiten Stufe betrachten wir die definiten <u>quadratischen Formen</u> welche als Normen der Gitterzahlen definirt sind:

$ax^2+bxy+cy^2=(\omega_1 x+\omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x+\bar{\omega}_2 y)$

Es sind dies insbesondere die positiven quadratischen Formen.

Den vorstehenden Substitutionsformeln entsprechend interessirt uns dabei weniger die einzelne Form, als die Classe aequivalenter Formen.

3. Auf der dritten Stufe untersuchen wir nicht die quadratische Form, sondern die quadratische Gleichung.

$ax^2+bxy+cy^2=0$ bez. $a\omega^2+b\omega+c=0$.

Bei diesem Standpunkte werden nicht die Zahlen a, b, c selbst, sondern nur die Verhältnisse $a:b:c$ in Betracht gezogen.

Bei 1. kommt von unserem geometrischen Bilde die ganze Figur des Punktgitters nach Lage und Grösse zur Geltung. Bei 2. kommt es nur auf die Gestalt, nicht auf die Orientirung des Gitters an. Wenn wir nämlich das Punktgitter um O beliebig drehen, also $e^{i\varphi}(\omega_1 x+\omega_2 y)$ an Stelle von $\omega_1 x+\omega_2 y$ und entsprechend $e^{-i\varphi}(\bar{\omega}_1 x+\bar{\omega}_2 y)$ an Stelle

von $\omega, x' + \omega_2 y$ setzen, so hat dieses auf die Norm der Gitterzahlen keinen Einfluss. Bei 3. bleibt ausser der Lage auch die absolute Grösse der Gittermaschen willkürlich. Wenn wir nämlich die ganze Gitterfigur in dem Verhältnisse ϱ verkleinern, so werden die Zahlen a, b, c durch $\varrho a, \varrho b, \varrho c$ ersetzt. Dadurch wird aber die Gleichung $a w^2 + b w + c = 0$ nicht geändert.

Andrerseits gehört zu jedem Gitter ein System elliptischer Functionen mit den Perioden ω_1, ω_2, welches ungeändert bleibt, wenn wir ω_1, ω_2 durch ein aequivalentes Paar ω_1', ω_2' ersetzen. Wir behaupten aber mehr. Die Gleichheit gewisser elliptischer Functionen zieht die Aequivalenz der Perioden nach sich. Die elliptischen Functionen versehen uns so mit den vollen analytischen Invarianten unserer zahlentheoretischen Gebilde.

Des Genaueren stellt sich die Sache so: Von dem Standpunkte 1. sind g_2 und g_3 die vollen Invarianten des Punktgitters, so dass, wenn g_2 und g_3, gebildet

für 2 Periodenpaare, übereinstimmen, die zu den Periodenpaaren gehörigen Punktgitter nach Gestalt und Lage identisch sind.

Auf dem Standpunkte 2) sind ausser $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ Norm (g_2) und Norm (g_3) die reinen Invarianten. Dass durch die Gleichheit der absoluten Invarianten sowie der Normen die Orientirung der Punktgitter noch nicht festgelegt sein kann, ist von vornherein klar. Wenn wir nämlich das Punktgitter um δ drehen, also w_1 und w_2 durch $e^{i\delta} w_1$ und $e^{i\delta} w_2$ ersetzen, so wird wegen der Homogenitätseigenschaft von g_2 und g_3 sowohl J wie $N g_2$ und $N g_3$ nicht verändert.

3. Von dem dritten Standpunkte aus ist $J(w)$ die einzige Invariante in dem Sinne, dass die Gleichung $J(w) = J(w')$ zur Folge hat, dass w und w' Wurzeln von zwei aequivalenten quadratischen Gleichungen sind, dass also

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}.$$

Beim Beweise dieser Behauptungen beginnen wir mit dem Falle 3). Wir wissen, dass $J(w)$ in seinem Fundamentalbereiche jeden Werth nur einmal annimmt. In der w-Ebene hat daher $J(w)$ denselben Werth nur für solche Punkte, welche an äquivalenten Theilen verschiedener Fundamentalbereich liegen. Aus der Gleichung $J(w) = J(w')$ folgt also $w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$. Die Punktgitter sind ähnlich, aber nicht nothwendig ähnlich gelegen und gleich. Darauf stützen wir uns beim Beweise der Behauptungen ad 2) und 1). Wir haben jedenfalls: $J\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = J\left(\frac{w_1'}{w_2'}\right)$. Hieraus ergiebt sich, wie wir sahen:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha w_1' + \beta w_2'}{\gamma w_1' + \delta w_2'}$$

oder, homogen geschrieben:

$$\begin{cases} \varrho\, w_1 = \alpha w_1' + \beta w_2' \\ \varrho\, w_2 = \gamma w_1' + \delta w_2' \end{cases}.$$

Nun ist aber

$$g_2(\varrho w_1, \varrho w_2) = \varrho^{-4} g_2(w_1, w_2)$$

und

$$g_3(\varrho\omega_1, \varrho\omega_2) = \varrho^{-6} g_3(\omega_1, \omega_2);$$

ferner haben wir

$$g_2(\omega_1', \omega_2') = g_2(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = g_2(\varrho\omega_1, \varrho\omega_2),$$

also

$$g_2(\omega_1', \omega_2') = \varrho^{-4} g_2(\omega_1, \omega_2)$$

und ebenso

$$g_3(\omega_1', \omega_2') = \varrho^{-6} g_3(\omega_1, \omega_2).$$

Im Falle 1.) laufet die Voraussetzung $g_2(\omega_1' \omega_2') = g_2(\omega, \omega_2)$ und $g_3(\omega_1' \omega_2') = g_3(\omega_1, \omega_2)$. Daraus ergiebt sich

$$N(\varrho^2) = 1 \text{ oder } \varrho = \pm 1.$$

In diesem Falle sind die Periodenpaare direct aequivalent, u. zw., wenn $\varrho = +1$, mittelst der Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, wenn $\varrho = -1$, mittelst $\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$. Die Punktgitter sind also völlig identisch.

Im Falle 2.) setzen wir nun voraus $Ng_2(\omega_1', \omega_2') = Ng_2(\omega_1, \omega_2)$ und $Ng_3(\omega_1', \omega_2') = Ng_3(\omega_1, \omega_2)$. Daraus folgt mit Rücksicht auf das Vorstehende:

$N\varrho^2 = 1$, also $\varrho = \epsilon^{i\ell}$.

In diesem Falle sind die Periodenpaare w_1, w_2 und w_1', w_2' also bis auf die Orientirung aequivalent; Die Punktgitter sind der Gestalt nach identisch, nur der Lage nach sind sie eventl. gegen einander gedreht.

Wie man sieht, ist der eigentliche Kernpunkt dieser fundamentalen Sätze, dass J im Fundamentalbereiche der w-Ebene jeden Werth gerade einmal annimmt (dass dieser Fundamentalbereich direct eine eindeutige Abbildung der J-Ebene ist).

Frei. d. 28. II. Wir haben uns jetzt mit derjenigen systematischen Auffassung der elliptischen Functionen vertraut zu machen, welche in den Vorlesungen über Modulfunctionen entwickelt ist.

Die bisher betrachteten elliptischen Functionen waren definirt als Invarianten der Gruppe

$$\begin{cases} u' = u + m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ w_1' = \alpha w_1 + \beta w_2 \\ w_2' = \gamma w_1 + \delta w_2, \end{cases}$$

welche relativ zu dem Discontinuitäts-bereich der Gruppe keine wesentlichen Singularitäten besitzen. Wir erweitern jetzt die Theorie dahin, dass wir auch die Untergruppen dieser Gesammtgruppe in Betracht ziehen. Dabei aber soll es sich nur um Untergruppen von endlichem Index handeln. Wir suchen dann die eindeutigen, homogenen Invarianten dieser Untergruppen auf, welche relativ zu dem betr. Discontinuitätsbereiche keine wesentliche Singularität besitzen. Diese Invarianten sind elliptische Functionen im weiteren Sinne. Während die bisherigen Functionen rationale Functionen von p, p', g_2 und g_3 waren, erweisen sich diese neuen Functionen als algebraisch von p, p', g_2 und g_3 abhängig. Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dass alle algebraischen Functionen

dieser Grössen elliptische Functionen seien, vielmehr entsteht die Frage, welche algebraischen Functionen von p, p', g_2 und g_3 als Invarianten einer unserer Untergruppen erhalten werden können. Wiederum kann man die ganzen algebraischen Functionen bevorzugen und kann die Forderung hinzufügen, dass nur ganzzahlige Coefficienten in ihren Entwickelungen auftreten sollen.

Die Theorie hat nun der Reihe nach folgende Aufgaben zu erledigen:

1. Alle Untergruppen der ternären Gruppe $\mathfrak{p}$ aufzuzählen.

2. Die zugehörigen Discontinuitätsbereiche anzugeben.

3. Die Functionen zu bilden, welche die Discontinuitätsbereiche zu Fundamentalbereichen haben und relativ zu denselben keine wesentlichen Singularitäten besitzen.

4. Die algebraischen Beziehungen zu untersuchen, in welchen diese Functionen zu den p, p', g_2, g_3 stehen.

Ich will mich hier, wie in den Vorle-

sungen" geschieht einen Augenblick auf Modulfunctionen, also die binäre Gruppe oder ω - Substitutionen beschränken. In dieser Hinsicht werde etwa Folgendes angeführt:

Von den Untergruppen sind die „Congruenzgruppen" am besten untersucht, das sind solche, welche aus der Gruppe

$$\omega_1 = \alpha\,\omega'_1 + \beta\,\omega'_2$$
$$\omega_2 = \gamma\,\omega'_1 + \delta\,\omega'_2$$

durch Congruenzen ausgeschieden werden, denen man die Coefficienten ihrer Substitutionen unterwirft. Speciell bezeichnet man als „Hauptcongruenzgruppe r^{ter} Stufe" diejenige Gruppe deren Substitutionen modulo n der Identität congruent sind. Die Coefficienten ihrer Substitutionen genügen den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv 1\,, & \beta &\equiv 0 \\ \gamma &\equiv 0\,, & \delta &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \pmod{n}.$$

Ein Beispiel für eine umfassendere

Congruenzgruppe n^{ter} Stufe liefert die Bedingung:

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}.$$

In der That überzeugen wir uns leicht, dass die so charakterisirten Substitutionen allemal eine Gruppe bilden.

Die zu Congruenzgruppen gehörigen Invarianten nennen wir <u>Modulfunktionen n^{ter} Stufe.</u>

Wollen wir nun umgekehrt auf die Substitutionen des u eingehen:

$$u' = u + m_1 w_1 + m_2 w_2,$$

indem wir die w Substitutionen bei Seite lassen.

Hier sind die Untergruppen besonders leicht anzugeben. Sie ergeben sich, indem wir w_1, w_2 durch irgend welche ganzzahligen Combinationen Λ_1, Λ_2 ersetzen und enthalten die Substitutionen:

$$u' = u + m_1 \Lambda_1 + m_2 \Lambda_2,$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= a w_1 + b w_2 \\ \Lambda_2 &= c w_1 + d w_2 \end{aligned}\right\}$$ (a, b, c, d ganze Zahlen von irgend welcher Determinante $ad - bc = N$).

Der Discontinuitätsbereich besteht wieder aus einem Parallelogramme; A_1, A_2 sind die Ecken des Parallelogrammes. Die Gesammtheit der Discontinuitätsbereiche liefert wieder eine Gittertheilung der Ebene, welche, wie wir uns ausdrücken, der ursprünglichen Gittertheilung eingelagert ist. Das einzelne Elementarparallelogramm des neuen Gitters ist N-mal so gross, wie das des alten. Ist $P\ P'\ G_2\ G_3$ bezeichnen wir solche Functionen, welche zu dem neuen Gitter in derselben Beziehung stehen, wie $p\ p'\ g_2\ g_3$ zu dem alten. Man wird dann nach der algebraischen Abhängigkeit fragen, welche $P, P' \ldots$ u. $p, p' \ldots$ verknüpft. Diese Frage nennt man das allgemeine Transformationsproblem N^{ter} Ordnung.

Besondere Fälle des allgemeinen Problems ergeben sich wenn die Zahlen a, b, c, d gemeinsame Theiler besitzen. Die äusserste Specialisirung ist die, dass wir einen Theiler n

herausheben können:

$$\Omega_1 = n(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)$$
$$\Omega_2 = n(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2),$$

von der Beschaffenheit, dass wieder $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ wird. Dann ist gleichzeitig $N = n^2$. Statt der vorstehenden Formen wir dann ebensogut die mit ihr aequivalente Transformation betrachten:

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1 &= n\,\omega_1\\ \Omega_2 &= n\,\omega_2\end{aligned}\right\}.$$

Diesen speciellen Fall bezeichnet man als <u>Multiplication der Perioden.</u>

Bei der Multiplication haben wir mit Rücksicht auf die Homogenität der elliptischen Functionen:

$$\mathfrak{P} = \wp(u, n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^2}\,\wp\left(\frac{u}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$
$$\mathfrak{P}' = \wp'(u, n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^3}\,\wp'\left(\frac{u}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$
$$G_2 = g_2(n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^4}\,G_2(\omega_1, \omega_2)$$
$$G_3 = g_3(n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^6}\,G_3(\omega_1, \omega_2).$$

Bei der Multiplication stimmen also bis auf einen Zahlenfactor $\frac{1}{n^r}$ die G_2, G_3 mit den g_2, g_3 direct überein und die P, P' mit den p, p', gebildet für ein durch n getheiltes Argument.

Die Functionen $p(n)$, $p'(n)$ sind nicht nur in dem Fundamentalbereiche ω_1, ω_2 sondern auch in dem Bereiche Λ_1, Λ_2 elliptische Functionen, und lassen sich als solche durch die einfachsten zu diesem Bereiche gehörigen Functionen, d. i. durch P und P' rational darstellen. Man kommt dann zu Formeln

$$(p, p') = Rat(P, P'),$$

welche man „Multiplicationsformeln" nennt. Umgekehrt stellen sich P und P' algebraisch durch p und p' dar. Diese umgekehrte Behandlung nennt man die <u>Theilung der elliptischen Functionen</u>. Analog stellt sich neben die vorhin betrachtete <u>directe</u> Transformation der elliptischen Functionen die <u>inverse</u> Trans-

formation. Bei gegebenem p und p' sind P und P' n^2-deutig bestimmt. Ist nämlich

$$P_0 = \frac{1}{n^2} p(n_0, \omega_1, \omega_2), \quad P_0 = \frac{1}{n^2} p'(n_0, \omega, \omega_2)$$

ein Werthepaar, welches zu den vorgegebenen Werthen von p und p' gehört, so erhalten wir hieraus alle unterschiedenen Werthepaare P, P', indem wir bilden

$$P = \frac{1}{n^2} p\left(n_0 + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right) \quad \begin{cases} \lambda = 0, 1, \ldots n-1 \\ \mu = 0, 1, \ldots n-1. \end{cases}$$

$$P' = \frac{1}{n^2} p'\left(n_0 + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$

Diese Werthepaare sind in der That alle von einander verschieden und liefern bei der Multiplication mit n alle dieselben Werte von p und p', wie P_0 und P_0'. Es sind auch die einzigen Wertepaare von dieser Eigenschaft, wie daraus hervorgeht, dass jedes Paar (p, p') im Fundamentalbereiche nur einmal vorkommt.

Hier ist nun leicht zu sehen, dass das Teilungsproblem mit der vor-

hin eingeführten Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe der w_1, w_2 zusammenhängt. Verlangen wir nämlich alle Substitutionen $w_1 = \alpha w_1' + \beta w_2'$, $w_2 = \gamma w_1' + \delta w_2' (\alpha\delta - \beta\gamma = +1)$ zu bestimmen, bei denen die sämmtlichen voraufgeführten Werte von P und P' ungeändert bleiben, so kommen wir direct zu

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv 1, \beta \equiv 0, \\ \gamma &\equiv 0, \delta \equiv 1. \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod.}\ n),$$

d. h. eben zur Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe. Unsere sämmtlichen P, P' sind also Functionen der n^{ten} Stufe.

Diese wenigen Erläuterungen mögen genügen, um in die Fragestellung einzuführen; das Nähere mögen Sie in den „Vorlesungen" und anderwärts nachstudieren.

Ich gebe nun einige Resultate, welche man für niedere Stufenzahlen erhalten hat. Zunächst im Anschlusse an die Weierstraß'sche

Theorie:

1. Modulformen der zweiten Stufe erhält man hier aus der Gleichung

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 0,$$

nämlich deren Wurzeln e_1, e_2, e_3. Man pflegt insbesondere die Differenzen $e_i - e_k$ zu betrachten.

Diese e_i, bez. $e_i - e_k$ sind, wie man aus ihrem Zusammenhange mit den g_2, g_3 ersieht, von der -2ten Dimension. Eine Modulfunktion der zweiten Stufe erhält man daraus durch Quotientenbildung. Diese Modulfunktion ist der Legendre'sche Modul, oder vielmehr das Quadrat desselben:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Geometrisch bedeutet k^2 das Doppelverhältnis der vier Verzweigungspunkte $e_1\ e_2\ e_3\ \infty$ auf der Riemann'schen Fläche (p, p'). An diese Bedeutung soll die Bezeichnung λ welche in den „Modulf." für k^2 benutzt wird, ein

nern. Bei den Vertauschungen der vier Verzweigungspunkte nimmt das Doppelverhältnis im Ganzen 6 verschiedene Werte an. Der einzelnen Vertauschung entspricht eine Transformation erster Ordnung der Perioden, also eine Substitution aus unserer Gruppe $(\alpha\ \beta\ \gamma)$. Gegenüber den Substitutionen der Gesamtgruppe ist daher der Legendre'sche Modul 6 verschiedener Werte fähig, was mit dem Index (6) der Hauptkongruenzgruppe 2ter Stufe übereinstimmt.

2. In der Weierstraß'schen Theorie kommen ferner Ausdrücke vor von der Form:

$$\sqrt{p(u) - e_\lambda}.$$

Dieselben sind, ebenso wie $p(u)$, eindeutige doppeltperiodische Funktionen von u. ihr Periodenparallelogramm ist aber doppelt so gross wie das ursprüngliche. (Beispielsweise gehört zu

$$\sqrt{p(u) - e_1}$$

das nebenstehende Parallelo-

Theorie:

1. Modulformen der zweiten Stufe erhält man hier aus der Gleichung

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 0,$$

nämlich deren Wurzeln e_1, e_2, e_3. Man pflegt insbesondere die Differenzen $e_i - e_k$ zu betrachten.

Diese e_i, bez. $e_i - e_k$ sind, wie man aus ihrem Zusammenhange mit den g_2, g_3 ersieht, von der -2ten Dimension. Eine Modulfunktion der zweiten Stufe erhält man daraus durch Quotientenbildung. Diese Modulfunktion ist der Legendre'sche Modul, oder vielmehr das Quadrat desselben:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Geometrisch bedeutet k^2 das Doppelverhältnis der vier Verzweigungspunkte $e_1\ e_2\ e_3\ \infty$ auf der Riemann'schen Fläche (p, p'). An diese Bedeutung soll die Bezeichnung λ welche in den „Modulf." für k^2 benutzt wird, erin-

nern. Bei den Vertauschungen der vier Verzweigungspunkte nimmt das Doppelverhältnis im Ganzen 6 verschiedene Werte an. Der einzelnen Vertauschung entspricht eine Transformation erster Ordnung der Perioden, also eine Substitution aus unserer Gruppe $(\alpha\beta\gamma)$. Gegenüber den Substitutionen der Gesamtgruppe ist daher der Legendre'sche Modul 6 verschiedener Werte fähig, was mit dem Index (6) der Hauptkongruenzgruppe 2ter Stufe übereinstimmt.

2. In der Weierstraß'schen Theorie kommen ferner Ausdrücke vor von der Form:

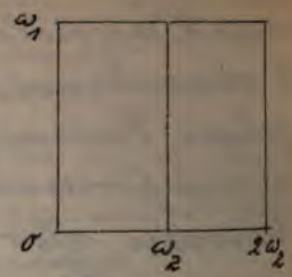
$$\sqrt{p(u) - e_\lambda}.$$

Dieselben sind, ebenso wie $p(u)$, eindeutige doppeltperiodische Funktionen von u, ihr Periodenparallelogramm ist aber doppelt so gross wie das ursprüngliche. (Beispielsweise gehört zu

$$\sqrt{p(u) - e_1}$$

das nebenstehende Parallelo-

gramm.)
Unsere Ausdrücke entstehen daher durch eine Transformation zweiter Ordnung.
Andrerseits sind die Ausdrücke



$$\sqrt{e_i - e_k}$$

eindeutige Functionen von ω_1, ω_2; es sind Modulformen von der -1ten Dimension und der 4ten Stufe.

3. Die Jacobi'schen Functionen setzen sich aus den eben genannten Bestandteilen in folgender Weise zusammen.

$$\operatorname{sn} am(z, k) = \sqrt{e_1 - e_3} : \sqrt{p(u) - e_3}$$
$$\operatorname{cn} am(z, k) = \sqrt{p(u) - e_1} : \sqrt{p(u) - e_3}$$
$$\Delta\, am(z, k) = \sqrt{p(u) - e_2} : \sqrt{p(u) - e_3}.$$

$z = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot u$

Sie sind bez. von der 4ten, 2ten und 2ten Stufe. Dieser Umstand sowie die vorstehenden Formeln zeigen deutlich, wie unsymmetrisch und von unserm Standpunkte un-

zweckmässig die Jacobi'schen Functio-
nen gewählt sind.

Ferner aber aus den Entwickelungen
über „Modulfunctionen":

1. Die Hauptcongruenzgruppe zweiter
Stufe kann uns als Modell für die Un-
tersuchung der höheren Congruenzgrup-
pen dienen; sie ist in diesem Sinne
Abschnitt II Cap 4 der „Modulfunctio-
nen" ausführlich besprochen. Ihr
Index ist gleich 6; die Hauptcon-
gruenz-gruppe 2ter Stufe umfasst sozu-
sagen den 6ten Teil der Substitutio-
nen der Gesammtgruppe.

Dementsprechend besteht der Dis-
continuitäts-Bereich aus 6 Discontinui-
täts-bereichen der Gruppe $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$
bez. aus 12 Discontinuitäts-Berei-
chen der „erweiterten" Gruppe.

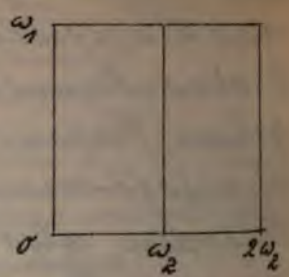
In der w-Ebene kann man
sie in der aus der nebenstehen-
den Figur ersichtlichen Weise
abgrenzen

Viel übersichtlicher aber wird
die Gestalt in der a, b, c-Ebene,

gramm.)

Unsere Ausdrücke entstehen daher durch eine Transformation zweiter Ordnung.

Andrerseits sind die Ausdrücke



$$\sqrt{e_i - e_k}$$

eindeutige Functionen von ω_1, ω_2; es sind Modulformen von der -1ten Dimension und der 4ten Stufe.

3. Die Jacobi'schen Functionen setzen sich aus den eben genannten Bestandteilen in folgender Weise zusammen.

$$\operatorname{sn} am(z, k) = \sqrt{e_1 - e_3} : \sqrt{p(u) - e_3}$$
$$\operatorname{cn} am(z, k) = \sqrt{p(u) - e_1} : \sqrt{p(u) - e_3}$$
$$\Delta\, am(z, k) = \sqrt{p(u) - e_2} : \sqrt{p(u) - e_3}.$$

$z = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot u$

Sie sind bez. von der 4ten, 2ten und 2ten Stufe. Dieser Umstand sowie die vorstehenden Formeln zeigen deutlich, wie unsymmetrisch und von unserm Standpunkte un-

zweckmässig die Jacobi'schen Functio-
nen gewählt sind.

Ferner aber aus den Entwickelungen
über „Modulfunctionen":

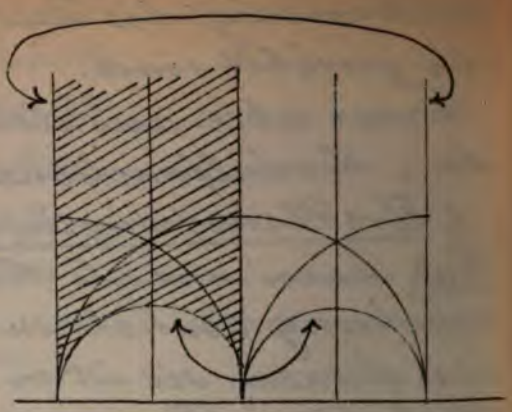
1. Die Hauptcongruenzgruppe zweiter
Stufe kann uns als Modell für die Un-
tersuchung der höheren Congruenzgrup-
pen dienen; sie ist in diesem Sinne
Abschnitt II Cap 4 der „Modulfunctio-
nen" ausführlich besprochen. Ihr
Index ist gleich 6; die Hauptcon-
gruenzgruppe 2ter Stufe umfasst sozu-
sagen den 6ten Teil der Substitutio-
nen der Gesammtgruppe.

Dementsprechend besteht der Dis-
continuitätsbereich aus 6 Discontinui-
tätsbereichen der Gruppe $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$
resp. aus 12 Discontinuitätsberei-
chen der „erweiterten" Gruppe.

In der w-Ebene kann man
sie in der aus der nebenstehen-
den Figur ersichtlichen Weise
abgrenzen

Viel übersichtlicher aber wird
eine Gestalt in der a, b, c-Ebene,

wie überhaupt die geradlinige Figur vor der Kreisbogenfigur entschieden den Vorzug verdient. Hier ist nämlich der Discontinuitätsbereich zweiter Stufe ein Quadrat, welches sich aus den beiden in der Mittellinie zusammenstossenden „Constructionsdreiecken" zusammensetzt. Durch die „Hülfslinien" zerfallen letztere in je 6 Elementardreiecke entsprechend den 2×6 Kreisbogendreiecken der ω-Ebene.



Wir erwähnten bereits, dass das Doppelverhältniss λ eine Modulfunction der 2ten Stufe ist; λ nimmt daher

alle seine Werte in dem genannten Bereiche an. Darüber hinaus zeigt sich nun aber, dass λ im Discontinuitätsbereiche zweiter Stufe jeden Wert nur einmal annimmt. Man kann daher diesen Bereich geradezu als conformes Abbild der λ-Ebene betrachten, der positiven λ-Halbebene entspricht dabei die eine (in den Figuren schraffirte) Hälfte dieses Bereiches. In Folge dessen wird die Function $\lambda(\omega)$ die charakteristische Invariante unserer Untergruppe in demselben Sinne, wie $J(\omega)$ die characteristische Invariante der Gesammtgruppe liefern. Wir können nämlich aus der Gleichung $\lambda(\omega) = \lambda(\omega')$ sofort auf die folgende Gleichung schliessen:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \text{ wo } \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \text{ mod } 2.$$

In der That nimmt $\lambda(\omega)$ an denjenigen Stellen, welche vermöge der Hauptcongruenzgruppe 2ter Stufe

aequivalent sind, und was das Wichtigere ist, nur an diesen Stellen die gleichen Werte an.

2. Bei den Congruenzgruppen höherer Stufen werden wir in entsprechender Weise zunächst den Index der Untergruppe, dann ihren Discontinuitätsbereich bestimmen. Letzterer setzt sich aus einzelnen Discontinuitätsbereichen der Gesammtgruppe zusammen, wobei die Anzahl derselben durch den Index der Untergruppe angegeben wird.

Hierbei greift eine sehr wichtige Unterscheidung Platz, welche an die Zuordnung der Randcurven anknüpft. Die Pfeile, welche wir an unsern Figuren anbringen, weisen darauf hin, dass wir die Discontinuitätsbereiche unserer Gruppen als geschlossene Flächen aufzufassen haben, indem wir uns die zugeordneten Randcurven zusammengebogen denken. Dabei kann sich entweder eine geschlossene Fläche vom Character der Kugelfläche ($p=0$) ergeben, oder

eine Fläche von höherem Zusammenhange. Die Riemann'sche Theorie der algebraischen Functionen lehrt nun, dass die Flächen der ersteren Art conform auf die Kugel bez. die schlichte Ebene abgebildet werden können. Bezeichnen wir mit u eine complexe Variable, welche in gewöhnlicher Weise in dieser Ebene ausgebreitet ist, so stellt $u(w)$ eine Modulfunction dar, welche in dem betr. Discontinuitätsbereiche der w-Ebene jeden Wert nur einmal annimmt. Wir bezeichnen eine solche Function als Hauptmodul. Die fundamentale Eigenschaft des Hauptmoduls ist die, dass jede andere Modulfunction des betr. Bereiches eine rationale Function des Hauptmoduls ist. Dahingegen kann man der Riemann'schen Theorie zufolge die Flächen mit $p>0$ nicht auf die schlichte Ebene, sondern nur auf eine mehrfach überdeckte Ebene, eine Riemann'sche Fläche abbilden, welche

zu derselben Zahl p gehört. Die einzelne Stelle der Riemann'schen Fläche wird aber nicht durch eine complexe Variable u, sondern nur durch die Zusammenstellung zweier Variabler (u, u') festgelegt, welche algebraisch von einander abhängen. Dementsprechend werden die Modulfunctionen eines Bereiches von höherem Zusammenhange nicht mehr rational durch eine, sondern durch zwei Functionen (u(w), u'(w)) ausdrückbar, zwischen denen eine algebraische Relation besteht. Im Falle p > 0 gibt es also keinen Hauptmodul. Diese fundamentalen Begriffe sind im 3ten Abschnitte der „Modulf." auseinandergesetzt. Sie treten natürlich nicht nur bei den Modulfunctionen, sondern überhaupt bei den eindeutigen Functionen eines beliebigen Fundamentalbereiches, also auch beispielsweise bei den elliptischen Functionen in ihrer Abhängigkeit von u, in Kraft.

Die bisher von uns betrachteten Fundamentalbereiche liefern in der That bereits geschlossene Flächen mit $p=0$ und $p>0$. In der ersteren Kategorie gehört der Fundamentalbereich der Gesammtgruppe der $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ Substitutionen und der der Hauptcongruenzgruppe 2ter Stufe. Dementsprechend lernten wir in den Functionen $J(w)$ und $\lambda(w)$ Modulfunctionen kennen, welche in dem bez. Fundamentalbereichen jeden Wert nur einmal annehmen. Alle andern Modulfunctionen des betr. Bereiches lassen sich durch diese „Hauptmoduln" rational ausdrücken, wie wir bereits sagten. Andrerseits giebt das Periodenparallelogramm der w-Ebene bei der Zusammenbiegung eine geschlossene Fläche vom Charakter des Ringes, eine Fläche mit $p=1$. Dementsprechend giebt es keine Function, welche im Periodenparallelogramm jeden Wert nur einmal annimmt. Dagegen kennen wir

2 Functionen $p(u)$ und $p'(u)$, welche zusammengenommen die einzelnen Punkte des Periodenparallelogrammes in eindeutiger Weise festlegen und welche dieses conform auf die Riemann'sche Fläche (p, p') abbilden. Wollen wir die allgemeineren doppeltperiodischen Functionen des Periodenparallelogramms rational darstellen, so brauchen wir dazu beide Functionen p und p'.

3. Bei der Untersuchung der folgenden Stufen (d. h. der jedesmaligen Hauptcongruenzgruppen) zeigt sich dass die Fundamentalbereiche der 3ten, 4ten, 5ten Stufe noch $p=0$, die der höheren Stufen aber $p>0$ besitzen. Daher haben wir bei der 3ten, 4ten und 5ten Stufe Hauptmoduln, welche bez.

$$\mu(\omega),\ o(\omega),\ \zeta(\omega)$$

heissen, und durch welche sich die übrigen Modulfunctionen der betr. Fundamentalbereiche rational ausdrücken. In's Besondere kann die

Function $J(w)$ selbst als Modulfunction der 2ten, 3ten 4ten und 5ten Stufe aufgefasst werden. Daher ist J eine rationale Function sowohl von λ, μ, o als von ξ.

Umgekehrt hängen diese Functionen ihrerseits algebraisch von J ab. Die Art dieser Abhängigkeit ist von anderer Seite her wohlbekannt. Es sind nämlich die Irrationalitäten, welche sich bei der Darstellung von λ, μ, o und ξ durch J ergeben, keine anderen, als die Irrationalitäten der regulären Körper u. zw. ist

$\lambda(J)$ die Dieder-Irrationalität für $n=3$.
$\mu(J)$ – Tetraeder – "
$o(J)$ – Oktaeder – "
$\xi(J)$ – Ikosaeder – " .

Es ist dies ein sehr merkwürdiger Zusammenhang, dem wir leider nicht weiter nachgehen können.

4. Die Tendenz der „Modulfunctionen" ist nun geradezu, neben dem J der Weierstrassischen und dem λ der Jacobi'schen Theorie die Moduln hö-

herer Stufen, welche sonst in der Litteratur ziemlich vernachlässigt werden, also ins Besondere die Tetraeder-, die Octaeder- und die Ikosaeder-Irrationalität systematisch zu berücksichtigen. Dieselbe Forderung werden wir auch nach der zahlentheoretischen Seite stellen. Man sollte die Theorie der singulären elliptischen Gebilde nicht einseitig für die J und λ entwerfen, wie es bisher geschehen ist, sondern sollte auch die μ, σ und δ in Betracht ziehen. Das kann nicht schwer sein und wird doch viel Interesse bieten. Quadratische Formen (a, b, c) werden dabei nur insofern als aequivalent gelten, als sie durch Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ in einander übergehen, die modulo 3, bez. 4 oder 5 zur Identität congruent sind. Dieselbe Festsetzung ist in Bezug auf den Zahlenmodul 2 bereits von Kronecker u. A. überall da getroffen worden, wo es sich um $\lambda(w)$ handelt.

5. Der Uebergang von Modulfunctionen niederer zu solchen höherer Stufe kann in besonderen Fällen durch Wurzelziehen bewerkstelligt werden. Diese Bildungsweise der Modulfunctionen ist von besonderer Wichtigkeit; sie soll daher an einzelnen Beispielen erläutert werden.

Ausgehend von dem Legendre'schen Modul λ bildet man

$$\sqrt[2]{\lambda}\,,\quad \sqrt[4]{\lambda}\,,\quad \sqrt[8]{\lambda}\,.$$

Es zeigt sich, dass diese Functionen in der w-Ebene eindeutig und Modulfunctionen bez. von der

$$4^{\text{ten}},\ 8^{\text{ten}},\ 16^{\text{ten}}\ \text{Stufe}$$

sind. Ferner zeigt sich, dass man auch aus dem Ausdrucke $\lambda(\lambda-1)$ eine Reihe von Wurzeln ausziehen kann, so dass sich Congruenzmoduln ergeben. Es werden nämlich

$$\sqrt[2]{\ },\ \sqrt[3]{\ },\ \sqrt[4]{\ },\ \sqrt[6]{\ },\ \sqrt[8]{\ },\ \sqrt[12]{\ },\ \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$$

eindeutige Modulfunctionen

Bez. von der

4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

Stufe. Dieselben treten ebenfalls in der Litteratur ausserordentlich viel auf, insbesondere kommt $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ bei Weber unter der Bezeichnung $f(w)$ vor.

In ähnlicher Weise verfährt man mit der Discriminante Δ, welche eine Modulform der ersten Stufe und, wie aus der Darstellung

$$\Delta = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} r \prod (1-r^m)^{24}$$

hervorgeht, der -12 ten Dimension ist. Man betrachtet nämlich die Modulformen $\Delta, \sqrt[2]{\Delta}, \sqrt[3]{\Delta}, \sqrt[4]{\Delta}, \sqrt[6]{\Delta}, \sqrt[12]{\Delta}$ von der Dimension $-12, -6, -4, -3, -2, -1$ und der Stufe $1, 2, 3, 4, 6, 12$.

6. Wir suchen uns von dem der Bildung dieser Ausdrücke zu Grunde liegenden Princip, soweit es in Kürze geschehen kann, Rechenschaft zu geben. Dass man zunächst bei Δ mit dem Wurzelzeichen nur bis $\sqrt[12]{\Delta}$ gehen darf,

sofern man eindeutige Functionen von w_1, w_2 erhalten will, ist klar, da ja $\sqrt[12]{\Delta}$ bereits von der Dimension -1 ist. Dass man aber wirklich soweit gehen darf, ohne dass man zu vieldeutigen Functionen kommt, ergiebt sich aus der vorstehenden Productdarstellung von Δ, die doch für den ganzen in Betracht kommenden Bereich $|r| < 1$ convergirt. Wir können hier nämlich die 2te, 3te, 4te, 6te, 12te Wurzel teils in rationaler Form, teils bei dem Factor r in transcendenter Form ausziehen, indem

$$z.B. \quad r^{1/12} = e^{\frac{2i\pi\omega_1}{12\omega_2}} = e^{\frac{i\pi\omega}{6}}$$

eine eindeutige Function von w_1 und w_2 wird. Was die angegebenen Stufenzahlen betrifft, so müssen wir uns mit einem Hinweise auf die „Modulf." (Bd. I pg. 623) begnügen.

Bei den Ausdrücken in λ liegen die Verhältnisse etwas anders.

Man erkennt nämlich (aus der Dreiecksteilung der w-Ebene) dass jede beliebige Wurzel aus λ eine eindeutige Function von w darstellt. Das gilt in's Besondere auch für den $\lg \lambda$, den wir ja als eine unendlich hohe Wurzel auffassen können. Wir können daher den Ausdruck $\sqrt[r]{\lambda}$ (r beliebig) als eine Modulfunction bezeichnen. Derselbe stellt aber im Allgemeinen keinen Congruenzmodul dar. Vielmehr beweist man (vergl. Rodulf. Bd I pg. 666), dass nur im Falle $r = 2, 4$ und 8 Congruenzmoduln der oben angegebenen Stufenzahlen erhalten werden. Desgleichen ergiebt sich hinsichtlich der Grösse $\lambda(\lambda-1)$, dass nur die oben angegebenen Wurzeln Congruenzmoduln liefern.

Noch möge der Zusammenhang von $\sqrt[r]{\lambda}$ und $\sqrt[2r]{\lambda(\lambda-1)}$ mit der Discriminante Δ angeführt werden. Man findet in dieser Hinsicht (vergl. Rodulf. II pg 66) die Darstel-

lung:

$$\sqrt[8]{-\lambda} = \sqrt[24]{\frac{\Delta\left(\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right)}{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)}}, \quad \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)} = \sqrt[24]{\frac{16\,\Delta(\omega_1, \omega_2)}{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)}};$$

dieselbe zeigt, dass $\sqrt[8]{-\lambda}$ und $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ auf Wurzeln aus transformirten Δ zurückkommen.

7. Für die hier betrachteten Wurzelfunctionen scheint eine eigene Terminologie am Platze. Wir sagten, dass $\sqrt[r]{\Delta}$ $(r = 2, 3, 4, 6, 12)$ sich bei den Substitutionen der 1ten Stufe im Allgemeinen verändert und daher einer höheren Stufe angehört. Die Aenderung kann aber nur in dem Hinzutreten von 2., 3., 4., 6., 12ten Einheitswurzeln bestehen. Diese Grössen stehen daher mit der 1ten Stufe in einem engeren Zusammenhange als die allgemeinen Modulfunctionen der betr. Stufe. Wir wollen diese Grössen der 1ten Stufe adjungirt nennen. Ebenso werden wir die angegebenen Wurzeln aus λ und $\lambda(\lambda-1)$ der

2ten Stufe adjungirt nennen, weil sie bei allen Substitutionen der 2ten Stufe sich nur um Einheitswurzeln verändern. Auch diese Auffassung entspricht der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen, in welcher in der That neben den Functionen, die auf einer Riemann'schen Fläche eindeutig sind, in erster Linie solche vieldeutige Functionen der Fläche betrachtet werden, die sich bei Umläufen um Einheitswurzeln ändern.

Den Schluss dieser Vorlesung mögen einige Bemerkungen zu dem Werke über Modulfunctionen bilden, welche die Stellung der Verfasser zu dem in dem Buche verfolgten Plane wiedergeben.

Das Werk beschäftigt sich ja fast ausschliesslich mit den Modulfunctionen, betrachtet also die elliptischen Functionen durchaus in ihrer Abhängigkeit von den ω, während die Abhängigkeit von u

zurückgedrängt wird. Hierin wol-
len Sie nur einen Akt ausgleichender
Gerechtigkeit erblicken. Während
nämlich die bisherigen Darstellungen
die Abhängigkeit der elliptischen Func-
tionen von den Perioden in ungebühr-
licher Weise vernachlässigten, schien
es vorteilhaft, einmal diese Seite der
Theorie vornehmlich hervorzukehren.
Schliesslich muss die allgemeine Auf-
fassung die sein, dass die elliptischen
Functionen solche dreier Variablen (u, w_1, w_2
sind, wobei man nur nach Bedürf-
nis bald die eine, bald die ande-
re dieser Variabeln voranstellt.

Eine zweite Bemerkung soll sich
auf die dem Buche zu Grunde lie-
gende Systematik, auf die Eintei-
lung nach Untergruppen und zu-
gehörigen Invarianten, im beson-
dere also die Stufeneinteilung
beziehen. Diese Systematik hat
gestattet, eine grosse Reihe der
bei den elliptischen Functionen
hervortretenden Beziehungen un-

der einheitliche und übersichtliche Gesichtspunkte zu bringen und in der Fülle der Formeln Ordnung zu stiften. Aber die Natur der Dinge ist allemal reicher als jedes noch so vollkommene System. Auch hier bleibt ein Rest von elliptischen Beziehungen übrig, der in das System nicht hinein passen will, nach Aufrichtung des Systems werden gerade diese Beziehungen ein besonderes Interesse beanspruchen. Denn in ihnen liegen die Keime weiterer Entwickelung.

Dies möge nach einer Seite hin näher ausgeführt werden. Wir wollen die Produktformel für die Discriminante folgendermassen schreiben:

$$\Delta = \left(\frac{2}{\omega_3}\right)^{12} \varphi(\omega), \quad \varphi(\omega) = x \prod (1-x^n)^{24}$$

und die Function $\varphi(\omega)$ in's Auge fassen. Dieselbe ist in unserer Terminologie überhaupt keine Modulfunction; denn sie ändert

sich bei sämmtlichen Substitutionen der Modulgruppe. Da Δ selbst unverändert bleibt, so haben wir in der That:

$$\varphi\left(\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}\right)=\left(\frac{\gamma w_2+\delta}{2\pi}\right)^{12}\Delta(w_1,w_2)$$
$$=(\gamma w+\delta)^{12}\cdot\varphi(w).$$

Allgemeiner werden wir nun solche Functionen in Betracht ziehen, welche sich bei unsern Substitutionen um irgend eine Potenz von $\gamma w+\delta$ ändern, wobei wir auch gebrochene Potenzen nicht ausschliessen. Es zeigt sich, dass eine solche Function sehr wohl in der Variabeln w eindeutig sein kann, was wir allerdings festhalten wollen. Sei nämlich

$$\Phi_r(w)=\sqrt[\nu]{\varphi(w)}=r^{1/r}\prod(1-x^m)^{\frac{24}{\nu}}=e^{\frac{2i\pi w}{\nu}}\cdot\prod(1-x^m)^{\frac{2m}{\nu}}.$$

Hier können wir jeden Factor des Productes nach dem Binom entwickeln und dann das ganze

Product in eine Potenzreihe nach r ordnen, die für $|x| < 1$ convergirt und also eine in der positiven w-Halbebene eindeutige Function ergibt. Während wir von dem früheren Standpunkte aus bei Δ nur die Wurzeln $r = 2, 3, 4, 6, 12$ zuliessen, kann r jetzt jede Zahl bedeuten. Die neue Function $\Phi_r(\omega)$ genügt der Functionalgleichung:

$$\Phi_r\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = (\gamma\omega+\delta)^{\frac{12}{r}}\,\Phi_r(\omega).$$

Wir sehen uns durch diese Gleichung vor ein merkwürdiges Problem gestellt. Wie soeben gezeigt wurde, haben nämlich die Ausdrücke Φ_r ganz bestimmte eindeutige Werte. Daher muss auch der an sich im Allgemeinen r-wertige Ausdruck $(\gamma\omega+\delta)^{\frac{12}{r}}$ in unserer Gleichung eine eindeutig-bestimmte Bedeutung haben. Es gilt also, aus den sämmtlichen möglichen Werten dieses Ausdrucks in jedem

Falle denjenigen auszusondern, der in der vorstehenden Gleichung gemeint ist. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir jeder Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ eine Einheitswurzel zuordnen, also auf eine durchaus zahlentheoretische Frage.

In dem Werke über Modulf. ist diese Frage bei Seite gelassen, dagegen spielt sie anderweitig in der Litteratur eine wichtige Rolle, nämlich im Falle $r=8$ in der Theorie der ϑ-Functionen und im Falle $r=24$ in den Arbeiten von Dedekind und Weber, wo die betr. Function $\sqrt[24]{\eta(w)}$ mit $\eta(w)$ bezeichnet wird.

Nehmen wir geradezu $r=\infty$, so tritt $\lg \varphi(w)$ als eine wichtige Modulfunction im erweiterten Sinne in die Betrachtung ein; auch sie ist in w eindeutig. Die Functionalgleichung

$$\lg \varphi\left(\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}\right) = 12 \lg(\gamma w+\delta) + \lg \varphi(w)$$

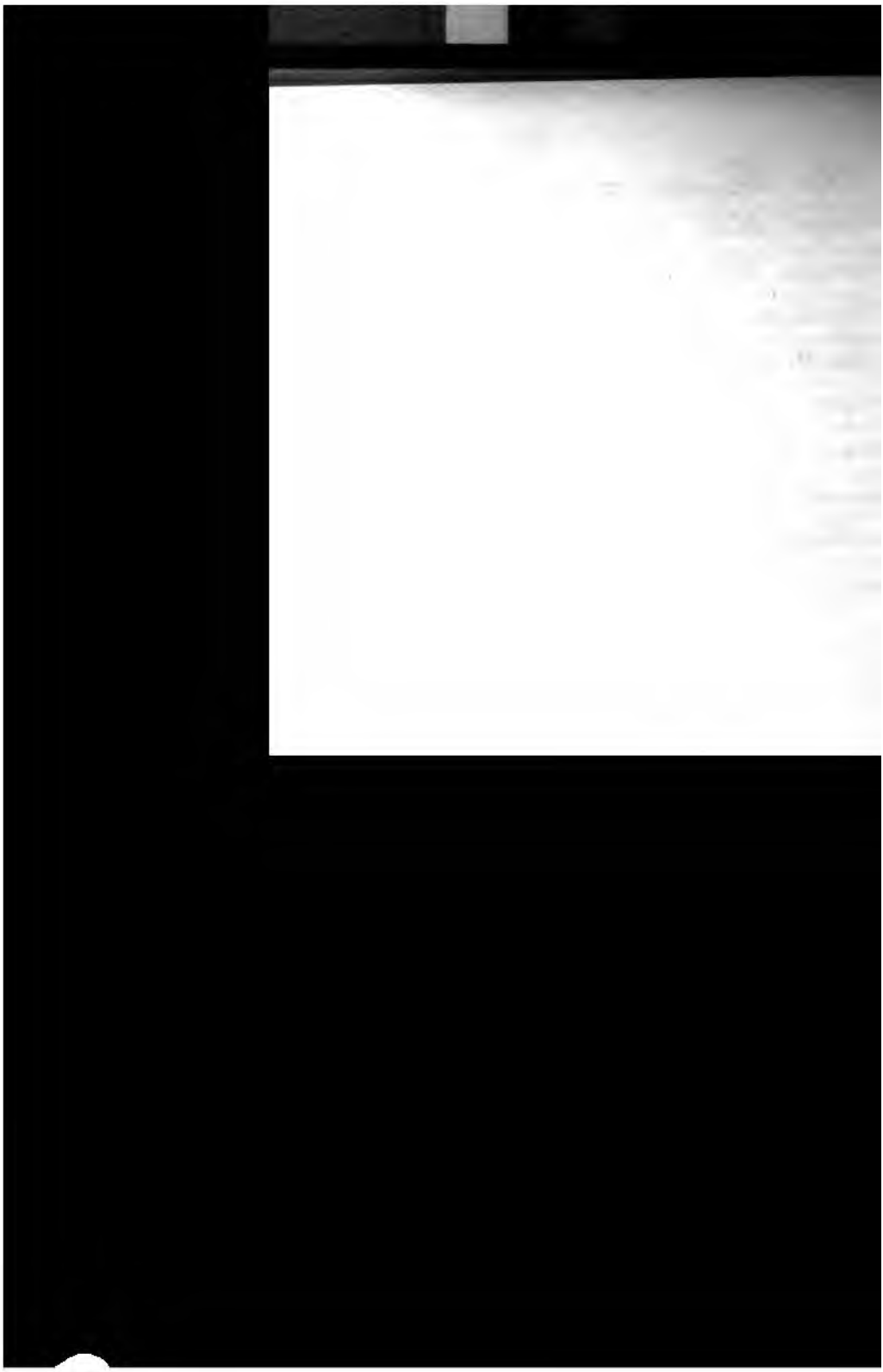
setzt wieder eine an sich vielden-

tige (u. zw. hier unendlich vieldeutige) Function mit eindeutigen Functionen in Beziehung. Es entsteht also die interessante Frage, nach welchem Gesetz aus den unendlich vielen Werten des Logarithmus derjenige ausgesucht werden muss, welcher der vorstehenden Gleichung genügt.

In der Litteratur tritt die Function $\lg \varepsilon(w)$ beispielsweise in der Kronecker'schen Grenzformel auf, welche wir im Sommer kennen lernen werden.

Hiermit schliessen wir unsere kurze Digression über die elliptischen Functionen, bez. elliptischen Modulfunctionen. Wir haben ja nichts Vollständiges geben können. Aber vielleicht sind unsere Bemerkungen doch geeignet, soweit in die Theorie einzuführen, dass die erste Schwierigkeit, welche der aeusserst weitschichtige Stoff darzubieten pflegt, überwunden ist.

An Ihnen wird es nun sein, während der Osterferien den so gewonnenen Ansatz durch speciellere Studien zu entwickeln. In der That werden wir im Sommersemester gar nichts machen können, wenn es uns nicht gestattet sein soll, hier und dort auf die Theorie der elliptischen Functionen zu recurriren.



Ausgewählte Kapitel

der

Zahlentheorie II.

Vorlesung,

gehalten im Sommersemester 1896

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von A. Sommerfeld und Ph. Furtwängler.

GÖTTINGEN 1897.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

eitung.

Die allgemeine Fragestellung betr. singuläre elliptische Gebilde 1
Bemerkungen über Moduln höherer Stufe und die zugehörige Definition der relativen Äquivalenz quadratischer Formen 6
Von der Kronecker'schen Grenzformel 14

ter Hauptteil: Von der Transformation höherer Ordnung der elliptischen Funktionen.

ie Transformation bei der Gitterfigur.

Das allgemeine Problem der eingelagerten Gitterzahl und Auswahl der Repräsentanten 18
Zusammenfassung der ganzzahligen Gitter mit gemeinsamer Stammdiscriminante (die h Stämme und ihre Zweige) 32

e Transformation der Grössen erster Stufe.

Die Transformationsgleichung F (J', J) = 0 auf Grund des Fundamentalpolygons 34 48
Einführung von j = 1728 J. Besondere Eigenschaften von F (j', j) = 0. Überleitung zur Multiplicatorgleichung erster Stufe. 61

e Transformation von Grössen höherer Stufe.

Allgemeine Erläuterungen, insbesondere betreffend ζ 73
Einiges über die Transformationstheorie des ζ (die Hauptgleichung und die 59 Nebengleichungen) 79

Anwendungen Kapitel
aus der
Zahlentheorie II.

Vorlesung,
gehalten im Sommersemester 1900
von
F. Klein.

Ausgearbeitet von L. Schaefer und M. Troisdorf.

Lithographirt.

Seite

Zweiter Hauptteil: Von der Composition der zu derselben Discriminante gehörigen ganzzahligen Gitter (insbes. für Stammdiscriminanten).

1. Elementare Constructionen.

Verabredungen beim Hauptgitter; die Gitterzahlen als ganze Zahlen des Körpers $\sqrt{d}$ 94
Vorläufiges über Nebengitter: Conjugierte Lage conjugierter Gitter . . 108
Orientierung der Ancepsgitter 114

2. Composition der Gitter (speciell der Stammgitter).

Definitionen 118
Allgemeiner Satz über die Composition zweier Stammgitter 123
Die Arndt'schen Formeln 129
Composition der Formen; Corollar der Gittercomposition 131
Specielle Fälle 134
Die h Stammgitter als eine Gruppe vertauschbarer Elemente 143
Zahlenbeispiele 150
Die Normalfigur der h orientierten Gitter 157

3. Die Teilbarkeitsgesetze im Gebiete der orientierten Gitterzahlen.

Der allgemeine Ansatz: Einheiten und Primzahlen 172
Die Grundoperationen im Gebiete der Gitterzahlen 176
Beziehungen zu Dedekinds Idealtheorie; Bildgitter 180
Beziehung zwischen den Gitterzahlen und ihren Bildgittern 184
Vergleich der Dedekind'schen Definition der Idealgitter mit der unsrigen 189
Verallgemeinerung der Idealtheorie (Nebengitterideale) 193
Gleichwertigkeit der Gitterzahlen und der entsprechenden Idealgitter bezüglich der Teilbarkeit 198
Algorithmus zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Teilers zweier Gitterzahlen 200
Die einfachen Gesetze der Faktorenzerlegung 206
Allgemeine Aufzählung der vorhandenen Primfaktoren 209

4. Andeutung über die Zweiggitter 221

Seite

ter Hauptteil: Von den singulären elliptischen Gebilden.

nleitung.

Bezeichnungen 222
Der Fundamentalsatz betr. die Übereinstimmung gewisser transformierter Gitter mit den Idealgittern 225

ie singulären j.

Die Bedeutung des Fundamentalsatzes für die Wurzeln der Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ und die zugehörige Multiplikatorgleichung 229
Bestätigungen im Falle $d = -3$ 237
Von den Transformationen n^{ter} Ordnung, welche $j' = j$ liefern 250
Die Funktion $j' - j$ auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche und die Klassenzahlrelation erster Stufe 262
Die Herstellung der Klassengleichung $\chi(J) = 0$ 276
Die Klassengleichung als Abel'sche Gleichung im Bereiche $\sqrt{-d}$ . . . 285
Andeutungen über den Klassenkörper (erster Stufe) 306

ie singulären Werte der Ikosaederirrationalität.

Erneute Betrachtung der zum Ikosaeder gehörigen Transformationsgleichungen 315
Die Gleichungen $f\left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right|(\zeta', \zeta) = 0$ und $\Psi\left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right|(r_g) = 0$ . . . 319
Die Klassengleichungen fünfter Stufe 349
Schlussbemerkung 353

Einleitung.

Do. 23.4.96. Unsere Hauptaufgabe im kommenden Semester wird es sein, dem wunderbaren Zusammenhange nachzugehen, welcher zwischen der Theorie der definiten binären quadratischen Formen und der Theorie der elliptischen Functionen besteht. Der Zusammenhang wird unmittelbar verdeutlicht durch die gemeinsame geometrische Vorstellung des Gitters, welche wir in dem ersten Theile dieser Vorlesung der Behandlung der quadratischen Formen zu Grunde legten und welche sich beim Studium der elliptischen Functionen von selbst darbietet. Indem wir bei unserem Gitter die Punkte und nicht die verbindenden Geraden als das wesentliche ansahen, kamen wir dazu, in der Zahlentheorie das Aquivalenzproblem voranzustellen und alle diejenigen Formen als gleichwerthig in eine Klasse zusammenzufassen, welche zu demselben Punktgitter gehö-

ren. In der Functionentheorie entspricht diesem Standpuncte, dass wir die elliptischen Functionen nicht allein durch die Periodicität in der Variabeln u definiren, sondern dass wir auch ihre Abhängigkeit von den Perioden ω_1, ω_2 betrachten und sie durch ihr Verhalten gegenüber den linearen Periodentransformationen

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' &= \gamma\omega_2 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

characterisiren. Die elliptischen Functionen sind hiernach Functionen dreier Variabeln u, ω_1, ω_2, welche durch gewisse Invarianteneigenschaften ausgezeichnet sind.

Wir sehen uns jedoch gezwungen, in der Folge noch einen Schritt weiter zu gehen; wir werden nur solche elliptischen Functionen untersuchen, in denen u überhaupt nicht vorkommt, werden uns also auf elliptische Modulfunctionen beschränken. Wir haben schon gegen Ende des vorigen

Semesters betont, dass wir diese Beschränkung, welche ja auch in den „Vorlesungen über Modulfunctionen" zu Grunde liegt, an sich durchaus nicht für wünschenswerth halten. Sie bringt es mit sich, dass sehr interessante Abschnitte der Theorie, so die Theilung der elliptischen Functionen, die allgemeine Transformationstheorie, nicht zur Sprache kommen werden. Indessen ist bei der Kürze der Zeit eine gewisse Auswahl des Stoffes durchaus geboten. Alles dieses wurde schon zum Schlusse des vorigen Semesters in seinen allgemeinen Umrissen erläutert, und es wurde auch schon betont, nach welcher Seite sich das besondere Interesse wendet. Die Sache ist folgende:

In der Zahlentheorie ist man gewohnt, die Coefficienten der quadratischen Form als ganzzahlig voraus zu setzen; gerade die wichtigsten Resultate der Theorie beziehen sich auf diesen Fall. Dementsprechend

werden wir unter den elliptischen Gebilden insbesondere solche betrachten, welche zu ganzzahligen quadratischen Formen gehören, in dem Sinne, daß die Norm der allgemeinsten Periode des Gebildes

$$(w_1 x + w_2 y)(\bar{w}_1 x + \bar{w}_2 y)$$

gleich einer Form

$$a x^2 + b x y + c y^2$$

mit ganzzahligen Coefficienten wird. Diese Gebilde nennt man nach dem Vorgange von Kronecker singuläre elliptische Gebilde. Es wird sich für uns darum handeln, die besonderen Eigenschaften kennen zu lernen, welche die singulären elliptischen Gebilde gegenüber der Periodentransformation n^{ter} Ordnung.

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= A w_1 + B w_2 \\ \Omega_2 &= C w_1 + D w_2 \end{aligned}\right\} AD - BC = n$$

aufweisen. Man bezeichnet diesen Gegenstand gewöhnlich kurzweg als die complexe Multiplication

der elliptischen Functionen. Die Bezeichnung rührt daher, daß unter den genannten Transformationen solche vorhanden sind, welche in einer Multiplication der Perioden mit einer complexen Zahl bestehen und daß diese besondere Transformation durch die Abhandlungen von Abel zuerst bekannt geworden ist.

Die Lehre von der complexen Multiplication bildet nach der allgemeinen Ansicht der Mathematiker einen der schönsten und zugleich einen der schwierigsten Theile unserer Wissenschaft. So konnte Camille Jordan in der Einleitung zu seinem Traité des Substitutions die von Kronecker aufgestellten Theoreme „l'envie et le déséspoir des géomètres" nennen. Ich hoffe, Ihnen zeigen zu können, daß infolge der in der Neuzeit erreichten Fortschritte keine eigentliche Schwierigkeit mehr mit dem Gegenstande verbunden ist, man vielmehr die

Hauptheoreme durchaus auf einfachem Wege einsehen kann.

Fr. 24. 4. 96. Bereits im vorigen Semester haben wir von der Stufeneintheilung der elliptischen Modulfunctionen gesprochen. Wir bezeichneten als Functionen der ersten Stufe solche Moduln, welche, wie die Function $J(w)$, bei der Gesammtgruppe der linearen Periodentransformationen in sich übergehen. Neben der Gesammtgruppe werden insbesondere diejenigen Untergruppen in Betracht gezogen und als Hauptcongruenzgruppen n^{ter} Stufe bezeichnet, deren Substitutionen modulo einer gegebenen Zahl n der Identität congruent sind.

Für die Hauptcongruenzgruppe der 2ten Stufe haben wir den Discontinuitätsbereich schon früher bestimmt. Er bestand aus dem Sechsfachen des Discontinuitätsbereiches

r Gesammtgruppe, entsprechend
m Umstande, dass der Index die
Untergruppe gleich 6 ist. In dem
ppelverhältnisse λ der Verzweigungs-
nkte des gewöhnlichen elliptischen
tegrals erkannten wir einen Haupt-
odul zweiter Stufe, d. h. eine Modul-
nction, welche in dem genannten Be-
iche jeden Werth einmal und nur
nmal annimmt. Eine unmittel-
re Folge dieser Eigenschaft ist, dass
e Gleichung

$$w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \pmod 2$$

ie andere Gleichung

$$\lambda(w') = \lambda(w)$$

ach sich zieht, und dass umge-
hrt diese Gleichung das Bestehen
ner bedingt. Jede andere Func-
n desselben Fundamentalbe-
iches wird eine rationale Func-
n von λ, insbesondere ist J
ine rationale Function 6ten Gra-

des: $J(w) = R_6(\lambda)$. Die Existenz eines Hauptmoduls zeigt an, dass der Fundamentalbereich zweiter Stufe vom Geschlechte 0 ist, d. h. dass er bei der durch die Kantenzuordnung angezeigten Zusammenbiegung in eine geschlossene Fläche vom Geschlechte 0 übergeht. Es hat dies insbesondere zur Folge, dass die 6 Werthe von λ, welche zu dem nämlichen Werthe von J gehören, linear untereinander zusammenhängen. Wegen des Beweises aller dieser Behauptungen vergl. Modulf. I pg. 270 u. ff., sowie die Figur von pg. 72.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Hauptcongruenzgruppen 3ter, 4ter und 5ter Stufe. Auch hier ist das Geschlecht des Discontinuitätsbereiches gleich 0, dagegen wird es für die höheren Stufen grösser als 0. Dem entsprechend giebt es einen Hauptmodul 3ter, 4ter und 5ter Stufe, derselbe wird mit $\xi(w)$, $\eta(w)$, $\zeta(w)$ bezeichnet und bez. Tetraeder-

Oktaëder-, Ikosaëder-Irrationalität

genannt. Die Benennung gründet sich darauf, dass die betr. Discontinuitäts-bereiche auf dieselbe Weise in Discontinuitätsbereiche der Gesammtgruppe zerfallen, wie die Kugel beiden Gebietseintheilungen der regulären Körper. In demselben Sinne gehört der Modul 1 zum „Dieder" $n = 3$. Man vergleiche hierzu „Modulf" I pg. 354, 355, 356, wo die Figuren in der w-Ebene, und pg. 104, 76, 106, wo die entsprechenden Figuren auf der Kugel dargestellt sind. Die Zerlegung der Discontinuitätsbereiche in Unterbereiche geht Hand in Hand mit der algebraischen Abhängigkeit der Moduln höherer Stufe von dem Modul J. Wir wollen die Beziehung für die 5te Stufe explicite angeben. Der zugehörige Disc. besteht aus 60 Disc. der Gesammtgruppe; daher wird J eine rationale Function 60ten Grades von ζ. Wir schreiben dieselbe in der Ge-

Gestalt einer fortlaufenden Proportion folgendermassen an:

$$J : (J-1) : 1 = \left[-\xi^{20} - 1 + 228(\xi^{15} - \xi^{5}) - 494\xi^{10} \right]^{3}$$
$$: -\left[\xi^{30} + 1 + 522(\xi^{25} - \xi^{5}) - 1005(\xi^{20} + \xi \right.$$
$$: 1728\xi^{5}(\xi^{10} + 11\xi^{5} - 1)^{5}.$$

Vergl. hierzu „Modulf" I pg. 105 und II pg. 383.

Die vorstehende Gleichung heisst die Ikosaëdergleichung; sie definirt ξ als algebraische Function von J.

Wir werden von der Ikosaëderirrationalität im Folgenden einen consequenten Gebrauch machen. Es zeigt sich ohnehin, dass man in der Transformationstheorie bei den Moduln der 1ten Stufe nicht stehen bleiben kann. In der vorhandenen Litteratur kommt bereits häufig das Doppelverhältnis λ, dann $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\lambda(\lambda-1)}$ etc. vor. Demgegenüber werden wir durchgehends die Ikosaëderirrationalität bevorzugen.

Wir haben in der Einleitung betont, dass der zahlentheoretische Aequiva-

lenzbegriff der Invarianteneigenschaft
der elliptischen Functionen genau ent-
spricht. Dies trifft jedoch zunächst nur
hinsichtlich der Modulfunctionen 1ter
Stufe zu. Um auch die Modulfunctionen
höherer Stufen für die Zahlentheorie
fruchtbar zu machen, müssen wir den
Aequivalenzbegriff verfeinern. Neben
der Aequivalenz schlechtweg werden
wir die relative Aequivalenz modulo
n stellen, indem wir die zu betrachten-
den Substitutionen, welche die eine Form
in die andere überführen sollen, auf
die Hauptcongruenzgruppe n ter Stu-
fe beschränken. Es entsteht insbeson-
dere die Frage: Wann sind zwei qua-
dratische Formen negativer Discrimi-
nante in diesem Sinne relativ ae-
quivalent?

Die Beantwortung dieser Frage ist
in unsern Modulfiguren der w-Ebe-
ne vollständig enthalten. In der
That geben dieselben in allen Fällen
ein geeignetes „Reductionsverfah-
ren" zur Entscheidung der Aequi-

valenz. Die einzelne Form wird in der w-Ebene durch dasjenige Paar conjugirter Punkte dargestellt, für welches $aw^2 + bw + c$ verschwindet. Handelt es sich um die gewöhnliche Aequivalenz, so giebt es eine und nur eine Substitution der Gesammtgruppe, welche einen Punkt des Paares in den Ausgangsraum der Dreiecksthei-lung überführt. Zwei Formen waren nun aequivalent, wenn sie bei der hierdurch definirten Reduction den-selben Punkt des reducirten Raumes ergaben. In ganz entsprechender Weise werden wir verfahren, wenn nach der relativen Aequivalenz zweier Formen gefragt ist. Wir dür-fen dann bei der Reduction nur die Substitutionen der betr. Un-tergruppe benutzen. Durch diese gelingt es jedesmal in eindeutiger Weise, die repräsentirenden Punkte der gegebenen Formen in den zu der betr. Hauptcongruenzgruppe gehörigen reducirten Discontinui-

tätsbereich zu bringen. Fallen dabei die repräsentirenden Punkte zusammen, so sind die Formen relativ aequivalent, im anderen Falle sind sie es nicht. Um die Reduction wirklich auszuführen, haben wir die erzeugenden Operationen der Untergruppe nach einem bestimmten Gesetze zu combiniren. Diese erzeugenden Substitutionen sind keine anderen, als diejenigen, welche die Kanten des reducirten Discontinuitätsbereiches zusammenordnen.

30.4.96. Wir erwähnten neben den Modulfunctionen der niedersten Stufe in der letzten Stunde des vorigen Semesters bereits einige Modulfunctionen höherer Stufen, welche zu denen der niedersten Stufen in einem einfachen algebraischen Verhältniß stehen. Besonders wichtig ist in dieser Hinsicht die in ω_1, ω_2 eindeutige Function:

$$\sqrt[12]{\Delta},$$

welche wir, da Δ von der ersten Stufe ist, als <u>der ersten Stufe adjun-</u>

girt bezeichneten. In denselben Sinne sind der zweiten Stufe adjungirt beispielsweise:

$$\sqrt[8]{\lambda}\,, \quad \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}\,.$$

Eine directe Untersuchung von $\sqrt[12]{\Delta}$ findet man bei Hurwitz: Math. Ann. Bd. 18. Vergl. auch Rodulf. I pg. 623.

Wichtig ist für uns u. a., daß $\sqrt[12]{\Delta}$ in der sog. „Kronecker'schen Grenzformel" auftritt. Ich kann auch über diesen interessanten Gegenstand hier nur ganz kurz referiren.

Kronecker knüpft an die Untersuchungen von Dirichlet zur Bestimmung der Klassenanzahl an, welche in der Zahlentheorie von Dirichlet-Dedekind, Cap. V, dargestellt sind. Das Charakteristische der Dirichlet'schen Untersuchungen ist das Hereinspielen der unendlichen Reihen in die Zahlentheorie. Dirichlet betrachtet bei gegebener quadratischer Form $ax^2 + bxy + cy^2$ die Reihe

$$\sum \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varsigma}},$$

in welcher sich die Summation über alle ganzen Zahlen x und y erstreckt, mit Ausnahme des Wertepaares $x=0, y=0$. Die Zahl ς muss grösser als Null genommen werden, damit die Reihe convergiert. In unserer Ausdrucksweise bedeutet die Reihe nichts Anderes als

$$\sum \frac{1}{(r^2)^{1+\varsigma}},$$

wo r die Entfernung der Gitterpunkte von O ist und wo über alle Gitterpunkte summirt wird. Dirichlet geht dann zum Limes $\varsigma = 0$ über und zeigt, dass

$$\lim_{\varsigma=0} \varsigma \sum \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varsigma}} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}$$

Als Function von ς aufgefasst, besitzt also die Dirichlet'sche Reihe für $\varsigma = 0$ einen einfachen Pol.

Die Leistung von Kronecker besteht nun darin, dass er in der Entwicke

lung der Reihe nach Potenzen von ϱ das nächst folgende Glied bestimmte. Es ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{D}}{2\pi} \sum \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho} + (\mathfrak{C} - \lg\{(\omega_1\bar{\omega}_2 - \omega_2\bar{\omega}_1)\sqrt[12]{\Delta\cdot\bar{\Delta}}\}) + \dots\dots$$

wo $\mathfrak{C}$ eine numerische Constante ist.*) Dieses ist die Kronecker'sche Grenzformel.

Wir fassen dieselbe hier auf als eine Methode zur Berechnung von $\sqrt[12]{\Delta}$ und schreiben dementsprechend:

$$\log\{(\omega_1\bar{\omega}_2 - \omega_2\bar{\omega}_1)\sqrt[12]{\Delta\cdot\bar{\Delta}}\} = \mathfrak{C} + \frac{1}{\varrho} - \frac{\sqrt{D}}{2\pi}\left(\sum \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varrho}}\right)_{\lim \varrho = 0}$$

Merkwürdiger Weise erscheint hier nicht die Function $\sqrt[12]{\Delta}$, sondern ihre Norm in eine Reihe entwickelt, im Gegensatz zu allen sonst bekannten Reihen der Functionstheorie. Ebenso können wir die rechte Seite als ein Aggregat von Normen auffassen, da nämlich

*) Hier ist natürlich $(\omega_1\bar{\omega}_2 - \omega_2\bar{\omega}_1) = \sqrt{D}$.

17.

$$ax^2+bxy+cy^2=|w_1x+w_2y|.$$

Wir kommen also in diesen modernsten Gebieten der Functionentheorie auf die Entwickelung einer Norm, welche nach Functionen von Normen fortschreitet, auf eine reelle Reihe von Functionen reeller Variabler!

Die Kronecker'schen Arbeiten befinden sich an verschiedenen Stellen vergl. insbesondere den Beweis der fortlaufenden Artikelreihe über elliptische Functionen, in den Sitzungsberichten d. Berliner Academie, 1883 № 1-5 und 1885 № 6-10. Weber behandelt die Kronecker'sche Grenzformel in S. 113 seiner elliptischen Functionen.

Erster Haupttheil.

Nach dieser einleitenden Übersicht handeln wir nun ausführlich von der

Transformation hoeherer Ordnung.

der Gitter und der mit ihr parallel laufenden Transformation höherer Ordnung der elliptischen Functionen.

Vorab bemerken wir, dass der Standpunkt, auf dem wir uns mit den Gittern befassen, der umfassendere ist und eine allgemeine Bedeutung für die Zahlentheorie besitzt, und dass die Beziehung zu den elliptischen Functionen erst dann zu Stande kommt, wenn wir dem Gitter spezielle eine definite Form (eine elliptische Maassbestimmung) zuordnen. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die späteren Auseinandersetzungen

dieser Vorlesung.

Unter einer Transformation n^{ter} Ordnung verstehen wir Folgendes: Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= a w_1 + b w_2 \\ \Lambda_2 &= c w_1 + d w_2 \end{aligned}\right\} \quad a d - b c = n > 1.$$

Hier bedeuten w_1, w_2 die Gitterzahlen (im Besonderen die gewöhnlichen complexen Zahlen), welche zu den dem Anfangspunkte anliegenden Eckpunkten irgend eines Parallelogramms gehören, welches wir dem ursprünglichen Gitter als Elementarparallelogramm einzeichnen können. Gleichzeitig werden Λ_1, Λ_2 die Gitterzahlen welche in demselben Sinne zu den Eckpunkten eines neuen Gitters gehören. Von demselben sagen wir, dass es dem ursprünglichen Gitter eingelagert ist. Die vorstehenden Formeln zeigen, dass nicht alle Ecken des alten Gitters in dem neuen Gitter vorkommen. Das eingelagerte Gitter besitzt

Erster Haupttheil.

Nach dieser einleitenden Übersicht handeln wir nun ausführlich von der

Transformation hoeherer Ordnung.

der Gitter und der mit ihr parallel laufenden Transformation höherer Ordnung der elliptischen Functionen.

Vorab bemerken wir, dass der Standpunkt, auf dem wir uns mit den Gittern befassen, der umfassendere ist und eine allgemeine Bedeutung für die Zahlentheorie besitzt, und dass die Beziehung zu den elliptischen Functionen erst dann zu Stande kommt, wenn wir dem Gitter speziell eine definite Form (eine elliptische Maassbestimmung) zuordnen. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die späteren Auseinandersetzungen

dieser Vorlesung.

Unter einer Transformation n^{ter} Ordnung verstehen wir Folgendes: Wir setzen

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda_1 = a w_1 + b w_2 \\ \Lambda_2 = c w_1 + d w_2 \end{array}\right\} \quad a d - b c = n > 1.$$

Hier bedeuten w_1, w_2 die Gitterzahlen (im Besonderen die gewöhnlichen complexen Zahlen), welche zu den dem Anfangspunkte anliegenden Eckpunkten irgend eines Parallelogramms gehören, welches wir dem ursprünglichen Gitter als Elementarparallelogramm einzeichnen können. Gleichzeitig werden Λ_1, Λ_2 die Gitterzahlen welche in demselben Sinne zu den Eckpunkten eines neuen Gitters gehören. Von demselben sagen wir, dass es dem ursprünglichen Gitter eingelagert ist. Die vorstehenden Formeln zeigen, dass nicht alle Ecken des alten Gitters in dem neuen Gitter vorkommen. Das eingelagerte Gitter besitzt

also, wie schon durch seine Benennung angezeigt wird, grösere Maschen als das ursprüngliche. Man berechnet leicht, dass das neue Elementarparallelogramm n-mal so gross ist, wie das ursprüngliche.

Statt von den Gittern können wir natürlich auch von den quadratischen Formen sprechen. So geschieht es bei Gauss. Gauss betrachtet neben der Form

$f = a'x^2 + b'xy + c'y^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$

die andere

$F = AX^2 + BXY + CY^2 = (\Lambda_1 X + \Lambda_2 Y)(\bar{\Lambda}_1 X + \bar{\Lambda}_2 Y)$,

in welcher die Λ mit den ω durch die Substitution 1) zusammenhängen. In Folge dessen haben wir:

$F = (\omega_1 (aX + cY) + \omega_2 (bX + dY))(\bar{\omega}_1 (aX + cY) + \bar{\omega}_2 (bX + \ldots$

Dies ist aber nichts Anderes, als der vorstehende Ausdruck für f, falls wir eintragen:

2) $\begin{cases} x = aX + cY \\ y = bX + dY \end{cases}$.

Hiernach können wir sagen: Es entsteht F aus f, wenn wir die Grössen x und y durch die Transformation 2) von der Determinante n substituiren und nach Potenzen der Grössen X und Y ordnen.

Eine in solcher Weise abgeleitete Form F nennt Gauss „<u>in f enthalten</u>". Diese Bezeichnung entspricht unserer Ausdrucksweise von dem „eingelagerten Gitter". Hinsichtlich der Discriminante ergiebt sich

$$D_F = n^2 D_f.$$

Diese Gleichung kommt auf unsere obige Angabe über den Flächeninhalt der Elementarparallelogramme hinaus.

Wir werden unsererseits aber hier wie auch sonst lieber bei den Gittern bleiben. Der Übergang

zu den Formen würde bedeuten, dass wir die einzelne Gitterzahl jedesmal mit einem Factor, der conjugirten Gitterzahl, multipliciren. Dadurch würden wir die Betrachtung unnöthig beschwerlich machen.

Wir geben zunächst eine Eintheilung unserer Transformationen nach der Größe des gemeinsamen Theilers, welcher in den Coefficienten der Gleichung 1) enthalten ist.

Ein besonders einfacher Fall ist der, wo nach Absonderung des gemeinsamen Theilers die Determinante der Coefficienten gleich 1 wird. In diesem Falle können wir (ev. durch Übergang zu einem aequivalenten Periodenpaar w_1, w_2) der Transformation die Form geben:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= m w_1 \\ \Lambda_2 &= m w_2 \end{aligned}\right| \quad n = m^2.$$

Wir haben dann die gewöhnliche Multiplication vor uns.

Das entgegengesetzte Extrem findet

statt, wenn die Coefficienten a, b, c, d überhaupt keinen gemeinsamen Theiler haben. Wir sprechen dann von einer eigentlichen Transformation n^{ter} Ordnung. Zwischen diesen aeussersten Fällen giebt es Zwischenstufen, welche man als gemischte Transformationen bezeichnen kann. Hierunter verstehen wir unter τ einen quadratischen Theiler von n verstanden, Transformationen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= \tau(a'w_1 + b'w_2) \\ \Lambda_2 &= \tau(c'w_1 + d'w_2) \end{aligned}\right| n = \tau^2(a'd' - b'c'),$$

wo nun a', b', c', d' theilerfremd sein sollen.

Sodann beschäftigen wir uns mit der Frage:

Wie viel verschiedene Gitter giebt es, welche durch Transformation n^{ter} Ordnung einem gegebenen Gitter eingelagert werden können?

Die Antwort lautet verschieden, je nachdem wir nach Parallelgittern oder nach Punktgittern fragen.

Parallelgitter giebt es natürlich in unendlicher Anzahl. Um sie aufzustellen, brauchen wir nur die Diophantische Gleichung

$$a d - b c = n$$

in allgemeinster Weise zu lösen, welche unendlich viele Wurzeln hat.

Um die Anzahl der Punktgitter zu finden, gehen wir von irgend einem Parallelgitter, d. h. von irgend einem Lösungssystem a, b, c, d aus. Auf dieses wenden wir eine Transformation erster Ordnung an, wodurch das Punktgitter nicht verändert wird. — Wir setzen also:

$$\Omega_1' = \alpha \Omega_1 + \beta \Omega_2 = (\alpha a + \beta c) w_1 + (\alpha b + \beta d) w_2$$

$$\Omega_2' = \gamma \Omega_1 + \delta \Omega_2 = (\gamma a + \delta c) w_1 + (\gamma b + \delta d) w_2$$

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 1.$$

Wir wollen nun diese $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dazu benutzen, um die Coefficienten des letzten Gliedes möglichst zu vereinfa-

hen. oder anders ausgedrückt, wir
ollen unter der Schaar der aequiva-
nten Gitter ein bestimmtes ausson
hen von besonders einfacher Gestalt.
iesesnennen wir den Repräsentan-
en der Klasse. Wir haben dann, um
die Anzahl der verschiedenen Punkt-
itter zu finden, nur nöthig, die
epräsentanten abzuzählen. Ueber
ie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verfügen wir folgender-
assen. Wir bestimmen γ und δ
us der Gleichung

$$\gamma a + \delta c = 0$$

ls theilerfremde Zahlen. Es ist
ann immer möglich, Zahlen α
nd β zu finden, so dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ird. Unsere Transformation lautet
etzt:

$$\left.\begin{array}{l} A_1' = A w_1 + B' w_2 \\ A_2' = \quad\quad D' w_2 \end{array}\right| \; AD' = n.$$

Dasselbe Verfahren wenden wir von
euem an, indem wir A_1', A_2' linear

substituiren. Dadurch können wir zunächst erreichen, dass A und D' positiv werden. Da nämlich $n > 0$, so haben A und D' dasselbe Vorzeichen. Ist dieses negativ, so gehen wir zu $-\mathfrak{A}'_1, -\mathfrak{A}'_2$ über, was einer Transformation erster Ordnung entspricht. Dabei wird das Vorzeichen von A und D' umgekehrt. Ferner können wir erreichen, dass

$$0 \leqq B' < D'$$

wird. Durch die Transformation

$$\mathfrak{A}''_1 = \mathfrak{A}_1 + \beta \mathfrak{A}_2$$

$$\mathfrak{A}''_2 = \mathfrak{A}_2,$$

welche gleichfalls die Determinante 1 hat, verwandelt sich nämlich B' in $B' + \beta D'$; durch geeignete Wahl von β können wir also der angegebenen Bedingung genüge leisten.

Hiernach verstehen wir unter dem „Repräsentanten" dasjenige Parallelgitter, welches aus dem ursprüng-

lichen durch die „repräsentirende Transformation"

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= A w_1 + B w_2 \\ \Omega_2 &= \quad D w_2 \end{aligned}\right| \quad A D = n,\ A > 0,\ D > 0,\ 0 \leqq B < D$$

hervorgeht. Die vorstehende Betrachtung zeigte, dass unter der Schaar aequivalenter Gitter mindestens ein Repräsentant dieser Art vorhanden ist. Dass es auch nur einen solchen geben kann, folgt ebenso leicht. Durch eine Transformation erster Ordnung geht nämlich Ω_1, Ω_2 über in

$$\Omega_1' = \alpha A w_1 + (\alpha B + \beta D) w_2$$

$$\Omega_2' = \gamma A w_1 + (\gamma B + \delta D) w_2 .$$

Soll hierdurch wieder ein Repräsentant gegeben sein, so muss $\gamma = 0$ sein; ferner wird, da $\alpha\delta = 1$ und $\alpha A > 0$ sein soll, $\alpha = 1$ und $\delta = 1$. Der Coefficient von w_2 in der zweiten Gleichung wird daher gleich D; da

ausserdem der Coefficient von w_2 in der ersten Gleichung kleiner als D' sein soll, so folgt nothwendig $B = 0$.

Die vorstehenden Betrachtungen fassen sich in den Satz zusammen:

Man bekommt alle eingelagerten Punktgitter und jedes nur einmal, indem man alle Transformationen

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= A w_1 + B' w_2 \\ \Lambda_2 &= \qquad D' w_2 \end{aligned}$$

aufschreibt, in denen A und D' positive Zahlen sind, welche im Producte n geben, und wo B' die Zahlen $0, 1, \ldots D'-1$ durchläuft.

1. 5. 96.) Wir kommen nun zur Abzählung der Repräsentanten. Zunächst sei n eine Primzahl: $n = p$. Dann ist entweder $A = 1$, $D' = p$ oder $A = p$, $D' = 1$. Dementsprechend giebt es die folgenden Transformationen:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= w_1 + B' w_2 \\ \Lambda_2 &= \qquad p w_2 \end{aligned}\right\} B' = 0, 1, \ldots p-1 \quad \Big| \; p \text{ Transf.}$$

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= p w_1 + B w_2 \\ \Lambda_2 &= \qquad w_2 \end{aligned}\right\} B = 0 \quad \Big| \; 1 \; .$$

im Ganzen $p+1$ Transformationen.

Wir nehmen ferner an: $n = p^2$. Wir können dann n auf dreierlei Arten zerlegen und haben:

$A=1, D=p^2, B=0,1,..p^2-1$	p^2 Transf.
$A=p, D=p, B=0,1,..p-1$	p ——
$A=p^2, D=1, B=0$	1 ——

im Ganzen p^2+p+1 Transformationen. Unter diesen befindet sich eine uneigentliche Transformation, welche in der zweiten Reihe vorkommt, nämlich $A_1 = pw_1$, $A_2 = pw_2$.

Hiernach ist das allgemeine Gesetz klar. Bedeutet n eine beliebige Zahl und $\Phi(n)$ die Theilersumme von n, so ist die Gesammtzahl aller Transformationen von der Ordnung n gleich $\Phi(n)$.

In der That kann D alle Theiler von n durchlaufen; zu jedem Werthe von D aber giebt es D Werte von B. Daher haben wir soviel Transformationen n^{ter} Ordnung, als die Summe der Theiler Einheiten enthält.

Unter diesen befinden sich jedoch auch uneigentliche Transformationen. Die Anzahl der eigentlichen wird, wie wir hier kurz angeben wollen:

$$\psi(n) = n\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\cdots$$

Dabei wird noch ersichtlich

$$\Phi(n) = \sum \psi\left(\frac{n}{\tau^2}\right).$$

Wenn wir nämlich n der Reihe nach von seinen quadratischen Theilern (τ) befreien und alle eigentlichen Transformationen von der Ordnung $\frac{n}{\tau^2}$ bilden, so erhalten wir in der Summe alle Transformationen von der Ordnung n.

Nach den vorstehenden Formeln können wir die folgende kleine Tabelle aufstellen:

$n=$	2	3	4	5	6	8	12	
$\psi=$	3	4	6	6	12	12	24	
$\Phi=$	3	4	7	6	12	15	28	

Vom arithmetischen Standpunkte sind die bisher besprochenen Repräsentanten die einfachsten, wir bezeichnen

sie als arithmetische Repräsentanten. Für die Zwecke der Functionentheorie nehmen wir aber besser eine kleine Änderung vor.

Es sei $n = p$. In diesem Falle lassen wir die ersten p der pg. 21 hingeschriebenen Repräsentanten ungeändert. Bei dem letzten derselben aber vertauschen wir Λ_1 mit Λ_2 und Λ_2 mit Λ_1, was auf eine Transformation 1ter Ordnung hinauskommt, so daß $\Lambda_1 = -\omega_2$, $\Lambda_2 = p\omega_1$ wird. Unsere $p+1$ Transformationen sind dadurch auf die gemeinsame Form gebracht:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \\ \Lambda_2 &= p(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2) \end{aligned}\right| \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Entsprechendes läßt sich allgemein erreichen. Sei n eine beliebige Zahl und $n = \tau^2 n'$. Alsdann kann man die Repräsentanten so umschreiben, daß

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= \tau(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \\ \Lambda_2 &= \tau n'(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2) \end{aligned}\right| \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Die in solcher Weise ausgewählten Transformationen nennen wir die *fundamentalen arithmetischen Repräsentanten*. Wir werden dieselben bald benutzen.

Die bisherigen Erörterungen bezogen sich auf ganz beliebige Gitter. Wir gehen nun auf „*ganzzahlige Gitter*" ein, d. h. auf solche, in denen a, b, c und in's Besondere

$$D = b^2 - 4ac.$$

ganze Zahlen sind. Während im allgemeinen Falle jedes Punktgitter für sich dasteht, treten, wie mehrfach bemerkt, die ganzzahligen Gitter von gleicher Discriminante zu einem Organismus zusammen. Wir bezeichnen die Anzahl der Punktgitter gleicher Discriminante mit h oder H, je nachdem wir nur die primitiven, oder überhaupt alle Punktgitter in Rechnung bringen. Dabei besteht ersichtlich die Relation:

$$H(D) = \sum h \left(\frac{D}{\tau^2}\right),$$

unter τ einen quadratischen Teiler von D verstanden.

Wir können aus jedem dieser Gitter durch Transformation n^{ter} Ordnung $\Phi(n)$ neue Gitter erhalten, welche die Discriminante $n^2 D$ besitzen werden. Die Frage liegt nahe, ob durch Transformation n^{ter} Ordnung überhaupt alle Gitter der Discriminante $n^2 D$ aus den Gittern der Discriminante D erhalten werden. Diese Frage wird durch eine Untersuchung von Lipschitz (vergl. Crelle Bd. 53, 1857) bejaht.

Hiernach können wir bei dem Studium der ganzzahligen Gitter folgendermassen verfahren: Wir bemerken zunächst, dass jede Discriminante die Form hat: $4V+1$ oder $4V$. Solche Discriminanten, welche nicht durch Transformation höherer Ordnung aus kleineren Discriminanten entstehen können, bezeichnen wir nach Weber als Stammdiscriminanten. Hiernach werden Stammdiscriminanten sein Diser. von der Form $4V+1$, falls sie ohne quadratischen Theiler

sind und Discrim. von der Form 4ν, falls ν keinen quadratischen Theiler enthält und falls nach Fortheb ung der 4 eine Zahl übrig bleibt, welche keine Discriminante sein kann, d.h. eine Zahl von der Form $4\nu'+2$ oder $4\nu'+3$. Wir construiren jetzt zu allen Stammdiscriminanten die zugehörigen Gitter, welche nothwendig sämmtlich primitiv werden, so dass $h = H$ wird. Dies sind unsere „Stammgitter". In die Stammgitter lagern durch Transformation n^{ter} Ordnung neue Gitter ein, wobei wir n alle Zahlen $2, 3, 4 \ldots$ durchlaufen lassen. Hierdurch kommen wir zu je $\Phi(n)$ „Zweiggittern". Auf diese Weise ergiebt sich eine systematische Aufzählung der ganzzahligen Gitter nach ihrem inneren Zusammenhange.

Wir betrachten nun die funktionentheoretische Seite unseres Pro-

blems. Gegeben sei ein elliptisches Gebilde durch seine Perioden w_1, w_2, die Invarianten g_2, g_3 bez. die absolute Invariante J. Wir nehmen eine Transformation n^{ter} Ordnung mit den Perioden vor, durch welche sich g_2, g_3, J in g_2', g_3', J' verwandeln mögen. Es entsteht die Frage, wie diese neuen Grössen mit den alten zusammenhängen.

Zunächst handelt es sich um die Function $J(w)$. Da dieselbe nur von dem Periodenquotienten abhängt, so wird dieselbe durch eine blosse Multiplication der Perioden überhaupt nicht geändert. Aus demselben Grunde haben wir überhaupt nur die eigentlichen Transformationen zu berücksichtigen, indem ein etwaiger gemeinsamer Factor τ der Transformationsgleichungen für λ_1, λ_2 im Quotienten von selbst herausfällt. Hiernach giebt es zu jedem Werthe von J für jedes n im Ganzen $\psi(n)$ transformirte Werthe.

$$J_1', \quad J_2', \quad \ldots \quad J_{\psi(n)}',$$

welche die allgemeine Form haben:

$$J\left(\frac{\alpha w + \beta}{n(\gamma w + \delta)}\right),$$

wo unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Werthe dieser Grössen aus den functionenth. Repräsentanten zu verstehen sind.

Die Frage ist, wie diese Werthe J' mit dem gegebenen J zusammenhängen.

In indirecter Weise kann man natürlich den Zusammenhang dahin definiren: Man suche zu dem gegebenen J die zugehörigen Werthe des Argumentes w, welche sämmtlich aus einem von ihnen w_0 durch die linearen Substitutionen $w = \frac{\alpha w_0 + \beta}{\gamma w_0 + \delta}$ hervorgehen. Man bilde nun $\frac{w}{n}$ und behalte von den unendlich vielen Werthen von $\frac{w}{n}$ nur die nicht aequivalenten bei. Als solche kann man direct die $\psi(n)$ functionentheoretischen Repräsentanten wählen. Endlich bestimme man die Werthe von J, welche diesen $\psi(n)$ Argumenten entsprechen. So erhält

man die gesuchten Werthe J':

$$J' = J\left(\frac{w}{n}\right),$$

dies ist natürlich nur eine von $\Psi(n)$ verschiedenen Darstellungen.

7.6.96. Wir wünschen aber den Zusammenhang in directerer Form anzugeben, indem wir, ohne auf das Argument w_0 zu recurriren, die Werthe J' in ihrer Abhängigkeit von den gegebenen Werthe J darstellen. In dieser Hinsicht werden wir den folgenden Satz beweisen, den wir zunächst nur für den Fall, dass der Transformationsgrad eine Primzahl ($n = p$) ist, aussprechen:

J' ist eine $(p+1)$-werthige irreducible algebraische Function von J.

Der Beweis stützt sich auf functionentheoretische Betrachtungen in der w-Ebene. Wir constatiren erstens, dass vermöge der obigen Darstellung $J' = J\left(\frac{w}{p}\right)$ eine eindeutige Function von w ist. *)

*) Nimmt man $J'(J)$ in voller Allgemeinheit, indem man von irgend einem zu J gehörigen w zu einem beliebigen $\frac{1}{n}\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}$ übergeht, so erhält man $\Psi(n)$ getrennte eindeutige Functionen von w nebeneinander.

Wir fragen sodann, bei welchen Substitutionen der $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$-Gruppe unser F' unverändert bleibt. Offenbar bei allen solchen Substitutionen und nur bei solchen, welche für das Argument $\frac{w}{p}$ eine ganzzahlige Substitution von der Determinante 1 oder wie wir kürzer sagen, eine ganzzahlige „unimodulare" Substitution darstellen.

Setzen wir also statt w ein $\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}$, so müssen in

$$\frac{\alpha w+\beta}{p(\gamma w+\delta)} = \frac{\alpha\frac{w}{p}+\frac{\beta}{p}}{p\gamma\frac{w}{p}+\delta}$$

die Coefficienten von $\frac{w}{p}$ ganze Zahlen von der Determinante 1 sein. Hierzu ist, wie man sieht, erforderlich und hinreichend, dass

$$\beta \equiv 0 \pmod{p}$$

wird. Die Substitutionen, welche dieser Bedingung genügen, bilden eine Untergruppe der gesammten $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$-Gruppe, welche, da sie durch eine Congruenz definirt ist, als Congruenzgruppe zu bezeichnen sein wird.

Man erinnere sich jetzt, dass $J(w)$ nur an solchen Stellen der w-Ebene denselben Werth annimmt, welche durch eine Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ zusammenhängen. Daraufhin können wir unser Resultat so aussprechen:

Ein und dasselbe Werthepaar (J, J') findet sich in der w-Ebene an solchen und nur an solchen Stellen wieder, welche relativ zu der Congruenzgruppe $\beta \equiv 0 \pmod{p}$ aequivalent sind.

Wir zeichnen sodann den Discontinuitätsbereich unserer Untergruppe. Unter den durch $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ zusammengeordneten Punkten der w-Ebene sind nur diejenigen im Sinne unserer Congruenzgruppe nicht-aequivalent, welche zu verschiedenen Werthenpaaren (J, J') Anlass geben. Die verschiedenen Werthe von J', welche aus einem gegebenen Werthe von $J(w_0)$ durch Transformation p^{ter} Ordnung entstehen, haben wir oben durch die functionentheoretischen Repräsentan-

ten characterisirt. Diese Repräsentanten sind

$$\frac{w_0}{p} \quad \frac{w_0+1}{p} \quad \frac{w_0+2}{p} \quad , \ldots \frac{w_0+p-1}{p} , -\frac{1}{w_0 p}$$

Um eine möglichst symmetrische Gestalt des Discontinuitätsbereiches herauszubekommen, wollen wir dieselben lieber in folgender Weise anordnen:

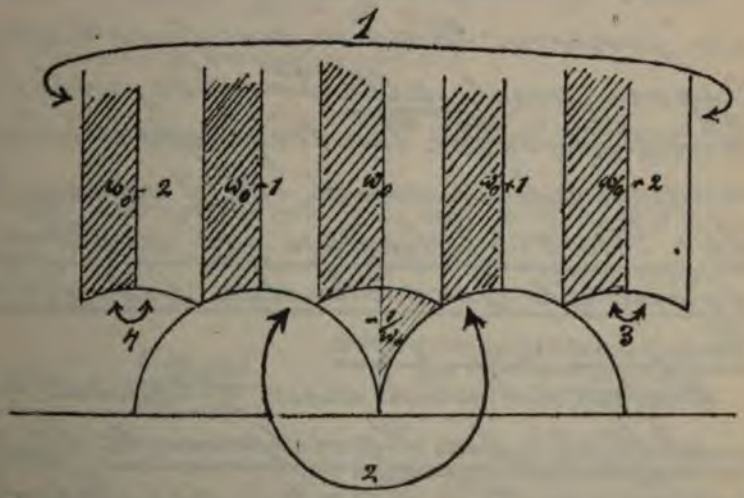
$$\frac{w_0 - \frac{p-1}{2}}{p} , \frac{w_0 - \frac{p-3}{2}}{p} , \ldots \frac{w_0 - 1}{p} , \frac{w_0}{p} , \frac{w_0+1}{p} , \ldots$$

$$\frac{w_0 + \frac{p-3}{2}}{p} , \frac{w_0 + \frac{p-1}{2}}{p} , -\frac{1}{p w_0} ,$$

was offenbar gestattet ist, weil diese Werthe den darüberstehenden im Sinne unserer Untergruppe paarweise aequivalent sind.

Wir wollen ferner unter w_0 speziell einen im reducirten Dreieck der w-Ebene gelegenen Werth verstehen. Durchläuft w_0 den ganzen reducirten Raum, so beschreiben gleichzeitig die Grössen $w_0+1, w_0-1, \ldots -\frac{1}{w_0}$ je ein anderes Elementardreieck der Modulthei-

ung. Die untenstehende Figur be-
zieht sich auf den Fall $p = 5$, den
wir für das folgende zu Grunde le-
gen wollen. Neben dem reducirten
haben wir hier 5 andere Dreiecke,
welche bez. die Werthe repräsentiren:
$w_0 + 1$, $w_0 - 1$, $w_0 + 2$, $w_0 - 2$, $-\frac{1}{w_0}$. Zu
irgend zwei Punkten des so entste-
henden Polygones gehören verschiede-
ne Werthe von (J, J').



Denn einerseits hat J nur in sol-
chen sechs Punkten unseres Polygo-
nes denselben Werth, welche ver-
möge der Gesammtgruppe aequi-

valent sind. In allen diesen Punkten aber besitzt F' verschiedene Werthe, weil dieselben verschiedenen funktionentheoretischen Repräsentanten entsprechen. Daher werden alle Punkte des Polygoninneren im Sinne unserer Untergruppe nicht-aequivalent. Umgekehrt giebt es zu jedem Punkte ausserhalb des Polygones im Innern einen Punkt, in dem sowohl F' wie F dieselben Werthe haben, wie in jenem. Daher umfasst das Polygon auch alle Punkte, welche im Sinne unserer Untergruppe nicht-aequivalent sind. Kurz einem Worte: Unser Polygon ist der Discontinuitätsbereich der betrachteten Congruenzgruppe.

Dabei ist noch eine Klausel hinsichtlich der Randpunkte hinzuzufügen. Die Kanten des Polygons sind durch die Substitutionen unserer Untergruppe paarweise einander zugeordnet. Streng genommen dürfen wir daher nur die

Hälfte der Begrenzung unserem Polygone hinzurechnen, während wir die andere Hälfte von der Definition des Discontinuitäts bereiches ausschließen müssen, wie solches durch stärkeres Ausziehen in der Figur angedeutet ist.

Die Substitutionen, welche die Kanten zusammenordnen sind folgende: Dem Pfeile 1 entspricht offenbar die Substitution:

$$w' = w \pm 5.$$

Der Pfeil 2 bedeutet:

$$-\frac{1}{w'} = -\frac{1}{w} \pm 1 \quad \text{oder} \quad w' = \frac{w}{\mp w + 1}$$

Endlich gehören zu dem Pfeile 3 und 4 die folgenden Substitutionen von der Periode 2:

$$w' = \frac{2w - 5}{w - 2} \quad , \quad w' = \frac{-2w - 5}{w + 2}$$

Dass die angegebenen Substitutionen sämmtlich zu unserer Untergruppe gehören, ist klar; dass sie die durch die Figur angegebene Kantenzuordnung leisten, rechnet man leicht

nach.

Diese Substitutionen führen das Polygon je in ein anliegendes relativ-aequivalentes über; bei Wiederholung und Combination derselben wird schliesslich die ganze w-Halbebene mit einem System analoger Polygone überdeckt. Die angegebenen Substitutionen bilden daher die Erzeugenden unserer Untergruppe einer allgemeinen Regel entsprechend, nach der die Substitutionen, welche die Kanten des Discontinuitätsbereiches zusammenordnen, allemal die erzeugenden Substitutionen der zugehörigen Gruppe darstellen.

Nachdem wir diese gruppentheoretischen Erläuterungen vorangeschickt haben, kommen wir nun zu den specifisch functionentheoretischen Schlüssen, durch welche wir die Abhängigkeit der Werthe J' und J bestimmen wollen. Sicherlich ist J' im Falle $p=5$ eine sechswerthige Function von J. Um dieses Ab-

hängigkeitsverhältniss bequem überschen zu können, werden wir uns die $\mathfrak{Z}$-Ebene mit einer sechsblätterigen Riemann'schen Fläche überdeckt denken.

Jedem Punkte dieser Fläche entspricht ein Werth des Functionenpaares $(\mathfrak{Z}', \mathfrak{Z})$ und umgekehrt. Andrerseits sahen wir, dass auch jeder Punkt unseres Polygones ein Werthepaar $(\mathfrak{Z}', \mathfrak{Z})$ repräsentirt und umgekehrt jedes Werthepaar $(\mathfrak{Z}', \mathfrak{Z})$ einen Punkt des Polygons bezeichnet. Dabei sind sowohl auf der Riemann'schen Fläche wie in unserm Polygone die Werthepaare $(\mathfrak{Z}', \mathfrak{Z})$ nach dem Gesetz der Stetigkeit ausgebreitet. In Folge dessen sind die Punkte der Riemann'schen Fläche und die Punkte des Polygones eindeutig und stetig aufeinander bezogen. Polygon und Fläche sind, wie man sagt, aufeinander eindeutig abgebildet. Unser Polygon liefert uns einen Fundamen-

tallbereich für die Functionen (Z', Z), d. h. einen genauen Ersatz der Riemann'schen Fläche. Die sechs Blätter, welche bei der Riemann'schen Fläche übereinander liegen, sind in unserem Polygone in übersichtlicher Weise neben einander ausgebreitet; sie entsprechen nämlich einzeln den sechs Elementardreiecken, aus denen sich unser Polygon zusammensetzt. Dabei stellt unser Polygon die geschlossene oder die in zweckmäßiger Weise zerschnittene Riemann'sche Fläche dar, je nachdem wir uns seine Kanten paarweise zusammengeheftet denken oder nicht.

8. V. 96. Wir kommen nun zum Beweise der pg 37 aufgestellten Behauptungen, daß nämlich Z' eine irreducible algebraische Function von Z ist. Der Zusammenhang zwischen Z' u. Z wird ein irreducibler, wenn die Riemann'sche Fläche aus einem Stücke be-

steht, er wird ein algebraischer, wenn F' auf der Riemann'schen Fläche keine wesentliche Singularität besitzt.

Was nun die Behauptung der Irreducibilität betrifft, so sieht man der Riemann'schen Fläche in der Gestalt unseres Polygones sofort an, dass sie in der That aus einem Stücke besteht. Die Sache würde nur dann anders liegen, wenn unsere Figur aus zwei verschiedenen Theilen bestände, deren Ränder einzeln unter sich zusammengeordnet wären.

Um zweitens zu zeigen, dass auf der Riemann'schen Fläche keine wesentlichen Singularitäten vorkommen, werden wir nach den allgemeinen Regeln der Functionentheorie verfahren, indem wir zeigen, dass für jeden Werth von x F' in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, welche, wenn überhaupt, nur eine endliche Anzahl von negativen Potenzen

von J enthält. Übrigens wollen wir im Folgenden nicht von der Function J, sondern von $j = 1728 J$ sprechen, weil dieselbe in arithmetischer Hinsicht vor J ausgezeichnet ist.

Unser Polygon erstreckt sich nur mit den beiden Zipfeln $w = 0$ und $w = \omega$, bis an die reelle Axe der w-Ebene heran. Sei w_0 zunächst ein Punkt unseres Polygons, welcher von diesen beiden Stellen verschieden ist. Die Function j ist in der Umgebung von w_0 eine analytische Function von w und kann daher in eine Reihe nach ganzen Potenzen von $w - w_0$ entwickelt werden. Umgekehrt läßt sich daher $w - w_0$ durch eine Potenzreihe in $j - j_0$ darstellen ($j_0 = j(w_0)$), in welcher keine negativen Potenzen von $j - j_0$ auftreten. Wir schreiben:

$$w - w_0 = \mathfrak{P}(j - j_0)$$

In entsprechender Weise können wir aber auch die Function $j' = j\left(\frac{\omega}{w}\right)$ an der Stelle w_0 entwickeln. Da

nämlich der Werth $\frac{w_0}{p}$ dem Innern der positiven w-Halbebene angehört, wenn dieses für den Werth w_0 der Fall ist, so werden wir haben ($f_0' = f(\frac{w_0}{p})$):

$$f' - f_0' = \mathfrak{P}(w - \frac{w_0}{p}).$$

Hier brauchen wir nur den Ausdruck für w aus der vorletzten Gleichung in die letzte einzutragen, um eine Potenzreihe von der Form

$$f' - f_0' = \mathfrak{P}(f - f_0)$$

zu erhalten, in dieser kommen negative Potenzen von $f - f_0$ überhaupt nicht vor. Hierdurch sind diejenigen Punkte unseres Polygons, welche im Innern der w-Halbebene liegen, erledigt.

Wir kommen nun zu den Stellen $w = 0$ und $w = \infty$. Hier giebt es natürlich für die Function f keine Potenzentwickelungen in w. Wohl aber haben wir bereits im vorigen Semester Entwickelungen

kennen gelernt, welche nach der Grösse

$$r = e^{2i\pi\omega}$$

fortschreiten und welche im Punkte $\omega = \infty$ bei Annäherung in der Richtung der imaginären Axe convergiren. Dieselben lauteten:

$$12 g_2 \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 = 1 + 240 \sum_1^\infty \frac{m^3 r^m}{1 - r^m}$$

$$\Delta \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} = r \prod_1^\infty (1 - r^m)^{24}$$

Hieraus ergiebt sich

$$J(\omega) = \frac{1728\, g_2^3}{\Delta} = \frac{1}{r} + \mathfrak{P}(r),$$

oder, wenn wir die nummerischen Werthe der ersten Coefficienten herset. zen wollen:

1) $J(\omega) = \frac{1}{r} + 744 + 196\,884\, r + \ldots$

Die entsprechende Reihe für J' erhalten wir, wenn wir bei unse. rem Beispiele $p = 5$ bleiben, da.

durch, dass wir w mit $\frac{w}{5}$, also r mit $r^{1/5}$ vertauschen. Daher wird

1') $J'(w) = \frac{1}{r^{1/5}} + 744 + 196884\, r^{1/5} + \ldots$

Je nachdem wir $\frac{w}{5} = \frac{w_0}{5}, \frac{w_0 \pm 1}{5}, \frac{w_0 \pm 2}{5}$ nehmen, werden hier die fünf verschiedenen Werthe von $r^{1/5}$ in Geltung kommen.

Aus dem Punkte $w = \infty$ geht der Punkt $w = 0$ hervor, wenn wir $-\frac{1}{w}$ an die Stelle von w treten lassen; dabei geht r über in

$$r' = e^{-\frac{2\pi i}{w}},$$

während J bei dieser Substitution nicht geändert wird. Die zusammengehörigen Reihenentwickelungen im Punkte $w = 0$ lauten daher:

2) $J(w) = \frac{1}{r'} + 744 + 196884\, r' + \ldots$

2') $J'(w) = \frac{1}{r'^5} + 744 + 196884\, r'^5 + \ldots$

Nun können wir aus den Reihen 1) bez. 2) r bez. r' durch eine Reihe darstellen, die nach Potenzen von $\frac{1}{J}$ fortschreitet und positive Exponenten aufweist.

Tragen wir diese Reihen in 1') bez. 2') ein, so erhalten wir eine Darstellung von J', aus welcher hervorgeht, daß J' auch in den Punkten der Riemann'schen Fläche, welche den Werthen $w=\infty$ und $w=0$ entsprechen, keine wesentliche Singularität besitzt. In Folge dessen hat J' auf der Riemann'schen Fläche überhaupt keinen wesentlich singulären Punkt und stellt in der That eine algebraische Function von J dar.

Das somit abgeleitete Resultat können wir auch folgendermassen formuliren: Wir bilden die sog. „Transformationsgleichung"

$$F(J;J)(J'-J_1')(J'-J_2')\cdots(J'-J_{p+1}')=0,$$

von welcher die Bestimmung der zu einem gegebenen J gehörigen transformirten Werthe J' abhängt. In ausgerechneter Form lautet sie:

$$J'^{p+1}+a_1 J'^{p}+\cdots a_{p+1}=0.$$

Hier sind nun die Coefficienten

a als symmetrische Function von $y', \ldots y^{(p)}$ in y eindeutig; da sie überdies in y algebraisch sind, so werden sie eindeutige algebraische, d. h. rationale Functionen von y. Wir erkennen also, dass für y' eine in y rationale irreducible algebraische Gleichung $p+1^{ten}$ Grades besteht.

Übrigens liefert unsere Schlussweise, welche von den Figuren in der w-Ebene ausging, mehr als die blosse Evidenz dieser Transformationsgleichung. Sie giebt gleichzeitig die Verzweigungspunkte der zugehörigen Riemann'schen Fläche an und die Art, wie die Blätter in den Verzweigungspunkten zusammenhängen. Vergl. hierzu Rodulf. II pag 36-62; an gegenwärtiger Stelle können wir dies nicht weiter verfolgen.

Wir betonen, dass wir vorstehend zu der Transformationsgleichung nicht sowohl durch Rechnung als vielmehr durch eine Reihe von Überlegungen u. zw. auf directestem Wege gelangt sind.

Gewöhnlich verfährt man weniger direct, indem man von der Theilungsgleichung der elliptischen Functionen ausgeht, wobei die Transformationsgleichung als Resolvente der Theilungsgleichung erscheint. Diesen Weg der übrigens nach anderer Seite Vortheile bietet, konnten wir hier schon deshalb nicht einschlagen, weil wir uns ja ausschliesslich auf Modulfunctionen beschränken müssen.

Wir handeln nun specieller von der Gleichung

$$F(J', J) = 0$$

und geben in Kürze eine Reihe von Sätzen über die Coefficienten derselben, wobei wir uns an das Buch von Weber: Elliptische Functionen: (vergl. pg. 250 u. ff.) anschliessen werden.

1. Die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots$ unserer Gleichung sind nicht nur rationale sondern auch ganze Functionen von J. Der Grund hier-

von liegt darin, daß j' und daher auch die symmetrischen Functionen der verschiedenen j' nur dann unendlich werden können, wenn j selbst unendlich wird, wie aus den Reihen von pg. 51 hervorgeht.

2. Bei einer Vertauschung von j und j' bleibt die linke Seite unserer Gleichung ungeändert. Wir bemerken nämlich, daß die Transformation p^{ter} Ordnung, sofern wir nur die Periodenquotienten w, w' in Betracht ziehen, eine wechselseitige Operation ist. Die Beziehung zwischen w und w' können wir unserem $p+1^{ten}$ Repräsentanten entsprechend allemal auch in der Form

$$w' = -\frac{1}{wp} \quad \text{oder} \quad w\,w' = -\frac{1}{p}$$

ausdrücken; dabei müssen wir nur w nicht auf den reducirten Raum beschränken, sondern eine geeignete Reihe von $p+1$ Dreiecken durchlaufen lassen. Aus der vorstehenden symmetrischen Schreib

Gewöhnlich verfährt man weniger direct, indem man von der Theilungsgleichung der elliptischen Functionen ausgeht, wobei die Transformationsgleichung als Resolvente der Theilungsgleichung erscheint. Diesen Weg der übrigens nach anderer Seite Vortheile bietet, konnten wir hier schon deshalb nicht einschlagen, weil wir uns ja ausschließlich auf Modulfunctionen beschränken müssen.

Wir handeln nun specieller von der Gleichung

$$F(J', J) = 0$$

und geben in Kürze eine Reihe von Sätzen über die Coefficienten derselben, wobei wir uns an das Buch von Weber: Elliptische Functionen: (vergl. pg. 250 u. ff.) anschliessen werden.

1. Die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots$ unserer Gleichung sind nicht nur rationale sondern auch ganze Functionen von J. Der Grund hier-

von liegt darin, daß j' und daher auch die symmetrischen Functionen der verschiedenen j' nur dann unendlich werden können, wenn j selbst unendlich wird, wie aus den Reihen von pag. 51 hervorgeht.

2. Bei einer Vertauschung von j und j' bleibt die linke Seite unserer Gleichung ungeändert. Wir bemerken nämlich, daß die Transformation p^{ter} Ordnung, sofern wir nur die Periodenquotienten w, w' in Betracht ziehen, eine wechselseitige Operation ist. Die Beziehung zwischen w und w' können wir unserem $p+1^{ten}$ Repräsentanten entsprechend allemal auch in der Form

$$w' = -\frac{1}{wp} \quad \text{oder} \quad w\,w' = -\frac{1}{p}$$

ausdrücken; dabei müssen wir nur w nicht auf den reducirten Raum beschränken, sondern eine geeignete Reihe von $p+1$ Dreiecken durchlaufen lassen. Aus der vorstehenden symmetrischen Schreib

weise folgt, dass wenn y' aus y durch Transformation p^{ter} Ordnung hervorgeht, auch umgekehrt y aus y' auf dieselbe Weise erzeugt werden kann. Hiernach wird die Transformationsgleichung $F(y', y) = 0$ ungeändert bestehen bleiben, wenn wir y und y' vertauschen. Wir haben daher

$$F(y', y) = C F(y, y').$$

Durch Wiederholung der Vertauschung $y \sim y'$ kommen wir zu

$$F(y, y) = C^2 F(y', y), \text{ d.h. } C^2 = 1, \quad C = \pm 1.$$

Der Werth $C = -1$ ist auszuschliessen, denn er würde zur Folge haben, dass für $y' = y$ $F(y, y) = -F(y, y) = 0$ sein müsste, dass also $F(y', y)$ den Teiler $y' - y$ besässe, was wegen der Irreducibilität von F unmöglich ist. Mithin bleibt nur $C = +1$ übrig, d. h. die linke Seite unserer Gleichung bleibt bei Vertauschung von y und y' gänzlich unge-

ändern.

Man bemerke übrigens, dass die genannte Eigenschaft durchaus an dem Umstande haftet, dass f eine Modulfunction ist und als solche nur von dem Quotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ abhängt. Üben wir die Transformation p^{ter} Ordnung an den Perioden selbst aus, so haben wir bei Zugrundelegung desselben Repräsentanten, wie oben:

$$\omega'_1 = -\omega_2$$
$$\omega'_2 = p\omega_1 .$$

Diese Operation ist nicht in ω und ω' symmetrisch; sie führt bei Wiederholung daher nicht zur Identität zurück. Vielmehr ergiebt sich, wenn wir noch zweitens hinzunehmen.

$$\omega''_1 = -\omega'_2$$
$$\omega''_2 = p\omega'_1$$

zwischen ω'' und ω eine gewöhnliche Multiplication mit $-p$, nämlich $\omega''_1 = -p\omega_1$,
$\omega''_2 = -p\omega_2$.

Hier kommt man also wie schon Jacobi bemerkt hat, durch Wiederholung der Transformation zu einer Multiplication.

3. Die nummerischen Coefficienten von $f'^{\alpha} f''^{\beta}$ werden sämmtlich ganze Zahlen. Die Anzahl der mög. lichen numerischen Coefficienten ist von vornherein begrenzt. Auf Grund des Satzes 2 kann nämlich jeder der Coefficienten a_i höchstens bis zum $p+1$ten Grade in f ansteigen. Man kann daher die Grössen a_i mit unbestimmten Coefficienten ansetzen, z. B.

$$a_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} f + \alpha_{i2} f^2 + \ldots \alpha_{i,p+1} f^{p+1},$$

und diese durch Eintragen der Reihenentwickelungen von f' und f'' berechnen. Die Ganzzahligkeit folgt dann aus dem Gesetz der Reihenentwickelungen nach Potenzen von x; die Einzelheiten vergl. bei Weber.

Das einzige ausgerechnete

Beispiel einer Transformationsgleichung verdanken wir Stephen Smith; derselbe berechnete im Falle $p=3$ die folgende Relation, in welcher zur Abkürzung $f' = 256x$, $f = 256y$ gesetzt ist:

$$x(x+2^7\cdot 3\cdot 5^3)^3 + y(y+2^7\cdot 3\cdot 5^3)^3 - 2x^{16}y^3 - 2^{15}\cdot 5^4\cdot 2217^3 xy$$
$$+2^4\cdot 3^2\cdot 31\, x^4y^4(x+y) - 2^2 3^3 9907\, xy(x^2+y^2)$$
$$+2\cdot 3^4\cdot 13\cdot 193\cdot 6367\, x^2y^2 + 2^8 3^5 5^3 4471\, xy(x+y) = 0.$$

An diesem Beispiel bewähren sich unsere bisherigen allgemeinen Regeln; wir erkennen aber zugleich, dass wir bei grösseren Werthen des Transformationsgrades zu ganz ungeheuerlichen Relationen geführt werden.

15. V. 96. 4. Die Coefficienten haben aber eine weitere arithmetische Eigenschaft, die wir erwähnen müssen. Man kann nämlich der Transformationsgleichung die Form geben:

$$(j'^p - j)(j^p - j') + \sum_0^p{}^h \sum^k c_{hk}(j'^h j^k + j'^k j^h) + \sum_0^{p-1} c_{hh} j'^h j^h = 0$$

Hier werden sämmtliche c_{hk} ganze durch p theilbare Zahlen. Der Beweis wird mit Hülfe der oben genannten Reihenentwickelungen von j' nach der Hülfsgrösse r geführt. Wir verweisen dieserhalb auf Weber, Ellipt. Fu. pg. 253-254.

Wenn man daher die Transformationsgleichung modulo p betrachtet, so reducirt sich ihre linke Seite einfach auf das Product:

$$(j'^p - j)(j^p - j').$$

5. Ist der Grad der Transformation keine Primzahl, sondern eine beliebige zusammengesetzte Zahl, so tritt, was den Grad der Transformationsgleichung betrifft, die zahlentheoretische Function $\psi(n)$ an die Stelle von $p+1$. Im Übrigen bleiben die sub 2 und 3 genannten Eigenschaften ungeändert bestehen.

Gegenüber dem bisher eingehaltenen Standpunkte, auf welchem wir die Transformationsgleichung voranstellten, giebt es einen höheren Standpunkt, von dem aus man die Gesammtheit der in y und y' rationalen Functionen in's Auge fasst. Man bezeichnet diese Gesammtheit als den Körper (y', y). Wir werden daher in Zukunft diesen Körper betrachten, aus den Functionen dieses Körpers die einfachsten aussuchen und deren algebraischen Zusammenhang mit y entwickeln. Hinterher werden wir dann die Grösse y' in rationaler Form durch diese einfachsten Functionen darstellen können.

Der moderne Ausdruck „Functionenkörper" ist im Grunde identisch mit dem, was man gewöhnlich eine „Riemann'sche Fläche" nennt. In der That ist die Gesammtheit der Functionen des Körpers im vorliegenden Falle nichts anderes als die Gesammtheit der auf der Rie-

mann'schen Fläche (f', f) eindeutigen und regulären Functionen. Die Beziehung auf die Riemann'sche Fläche ist für uns deshalb von Vortheil, weil wir diese in der Gestalt unseres Kreisbogenpolygons bequem übersehen können. Aus diesem Grunde wird auch in dem Buche über Hodulf. die Terminologie der Riemann'schen Fläche festgehalten. Der Begriff des Körpers hat aber in anderer Hinsicht seine Vorzüge. Man kann nämlich den Functionen des Körpers die Bedingung auferlegen, dass sie nur ganzzahlige Coefficienten haben sollen. Diese Verschärfung des Begriffes lässt sich in dem Bilde der Riemann'schen Fläche nicht gut durchführen.

Wir könnten nun, von den niedersten Fällen beginnend, an der Hand unserer Figuren die Functionen des Körpers (f', f) discutiren. Statt dessen werden wir hier lieber einen allgemeinern Weg

einschlagen, welcher indirect zu dem oben bezeichneten Ziele führt.

Wir betrachten statt der absoluten Invariante j die Invarianten g_2, g_3, Δ. Bei der Transformation n^{ter} Ordnung mögen diese übergehen in

$g_2' = g_2(aw_1 + bw_2, cw_1 + dw_2)$, g_3', Δ'.

Um zu Modulfunctionen zurückzugelangen, bilden wir

$$\frac{g_2'^3}{g_2^3}, \quad \frac{g_3'^2}{g_3^2}, \quad \frac{\Delta'}{\Delta},$$

welche Ausdrücke ersichtlich nur von dem Quotienten $\frac{w_1}{w_2} = w$ abhängen werden. Es zeigt sich sofort dass diese Grössen, ebenso wie j', $\psi(n)$ verschiedene Werthe besitzen, auf der Riemann'schen Fläche eindeutig sind und keine wesentlichen Singularitäten haben. Auf den Beweis gehen wir nicht weiter ein. Wir constatiren aber, dass die genannten Grössen in Folge dessen rationale Functionen von j' und j sein

werden und dass sich ζ' umgekehrt durch ζ und eine der genannten Functionen rational darstellen lässt. Es giebt aber noch einfachere Functionen, als die genannten, welche gleichfalls unserem Körper angehören, nämlich gewisse Wurzeln derselben. Wir bezeichnen

$$n\sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}}$$

mit 16 (Multiplicator); auf den Grund dieser Benennung kommen wir später zurück. Dass diese Grösse, falls sie unserem Körper angehört, eine einfachere algebraische Function als $\frac{\Delta'}{\Delta}$ ist, ist klar. Denn die algebraische Gleichung, welcher 16^{12} genügt und welche aus der algebraischen Gleichung für 16 leicht abgeleitet werden kann, hat jedenfalls eine complicirtere Gestalt wie die letztere.

Die in jedem Fall zu benutzende einfachste Function, welche noch

in unserem Körper liegt, geben wir in der folgenden Zusammenstellung an. Dabei beschränken wir uns auf solche Transformationsgraden, welche nicht durch 2 oder durch 3 theilbar sind. Es geschieht dies um nicht zu viele Fallunterscheidungen machen zu müssen. Wir haben daraufhin modulo 12 folgende vier Fälle zu unterscheiden:

$$n \equiv 1 \quad , \quad 5 \quad , \quad 7, \quad 11 \pmod{12}$$

$$\sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \mathfrak{M}, \quad \sqrt[4]{\frac{\Delta'}{\Delta}} \cdot \mathfrak{M}^3, \quad \sqrt[6]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \mathfrak{M}^2, \quad \sqrt[6]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \mathfrak{M}$$

Eine Ausnahmestellung nimmt der Fall ein, wo n eine Quadratzahl ist. Eine Quadratzahl, welche weder durch 2 noch durch 3 theilbar ist, muss immer $\equiv 1 \pmod{12}$ sein. Für ein solches n liegt nicht nur die 12te, sondern sogar die 24te Wurzel von $\frac{\Delta'}{\Delta}$ in unserem Körper. Daher wird in diesem

Falle die einfachste Function:

$$\text{vn.} \sqrt[24]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \sqrt{k}$$

Die angegebene Unterscheidung zwischen den verschiedenen Fällen können wir vermeiden, wenn wir unsern Rationalitätsbereich ein wenig erweitern. Wir wollen nicht nur j, sondern nach Bedarf auch noch die folgenden einfachen algebraischen Functionen von j als rational bekannt ansehen:

$$j_2 = \sqrt[3]{j} = \frac{12 g_2}{\sqrt{\Delta}}, \quad j_3 = \sqrt{j - 1728} = \frac{216 g_3}{\sqrt{\Delta}}$$

(in denen natürlich j selbst rational darstellbar ist).

Nach Erweiterung des Rationalitätsbereiches wird sich der Kreis der in unserem Körper befindlichen Functionen vergrössert haben.

Es zeigt sich, dass nunmehr k

in allen Fällen zu unserem Körper gehört, d.h. einer Gleichung vom Grade $\Psi(n)$ mit Coefficienten, die in f, f_2 und f_3 rational sind, genüge leistet.

U. zw. haben wir zu dem Ende im Falle $n \equiv 5 \pmod{12}$: f_2, im Falle $n \equiv 7$: f_3, im Falle $n \equiv 11$ sowohl f_2 als f_3 zu dem ursprünglichen Rationalitätsbereich zu adjungiren; im Falle $n \equiv 1$ ist natürlich eine solche Adjunction überflüssig. Es soll daher unser Rationalitätsbereich in den Fällen

$n \equiv 1,\ n \equiv 5,\ n \equiv 7,\ n \equiv 11 \pmod{12}$

aus den Functionen bestehen:

$$f,\quad f_2,\quad f_3,\quad f_2, f_3.$$

Der Vorzug des „Multiplicators" k gegenüber der Grösse f' besteht in der grösseren Einfachheit der algebraischen Gleichung, durch welche k bestimmt wird. Wir nennen diese Gleichung „Multiplicatorgleichung"; sie lautet in den niedrigsten Prim-

Falle die einfachste Function:

$$\text{vn.} \sqrt[24]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \sqrt{k}$$

Die angegebene Unterscheidung zwischen den verschiedenen Fällen können wir vermeiden, wenn wir unsern Rationalitätsbereich ein wenig erweitern. Wir wollen nicht nur j, sondern nach Bedarf auch noch die folgenden einfachen algebraischen Functionen von j als rational bekannt ansehen:

$$j_2 = \sqrt[3]{j} = \frac{12 g_2}{\sqrt{\Delta}}, \quad j_3 = \sqrt{j - 1728} = \frac{216 g_3}{\sqrt{\Delta}}$$

(in denen natürlich j selbst rational darstellbar ist).

Nach Erweiterung des Rationalitätsbereiches wird sich der Kreis der in unserem Körper befindlichen Functionen vergrössert haben.

Es zeigt sich, dass nunmehr k

in allen Fällen zu unserem Körper gehört, d.h. einer Gleichung vom Grade $\varphi(n)$ mit Coefficienten, die in f, f_2 und f_3 rational sind, genüge leistet.

U. zw. haben wir zu dem Ende im Falle $n \equiv 5 \pmod{12}$: f_2, im Falle $n \equiv 7$: f_3, im Falle $n \equiv 11$ sowohl f_2 als f_3 zu dem ursprünglichen Rationalitätsbereich zu adjungiren; im Falle $n \equiv 1$ ist natürlich eine solche Adjunction überflüssig. Es soll daher unser Rationalitätsbereich in den Fällen

$n \equiv 1,\ n \equiv 5,\ n \equiv 7,\ n \equiv 11\ (12)$

aus den Functionen bestehen:

$$f,\quad f_2,\quad f_3,\quad f_2, f_3.$$

Der Vorzug des „Multiplicators" k gegenüber der Grösse f' besteht in der grösseren Einfachheit der algebraischen Gleichung, durch welche k bestimmt wird. Wir nennen diese Gleichung „Multiplicatorgleichung"; sie lautet in den niedrigsten Prim-

zahl-Fällen, soweit sie nicht durch unsere obige Beschränkung ausgeschlossen sind:

$$n = 5 \qquad M^6 + 10M^3 - \tfrac{5}{2}M + 5 = 0$$

$$n = 7 \qquad M^8 + 14M^6 + 63M^4 + 70M^2 + \tfrac{35}{2}M - 7 = 0$$

$$n = 11 \qquad M^{12} - 990M^6 + 440\tfrac{5}{2}M^4 - 165M^3 + 22\tfrac{5^2}{2}M^2 - \tfrac{5^2\cdot 11}{2}M - 11 = 0.$$

In diesen Gleichungen kommt das, was soeben über den Rationalitätsbereich gesagt ist, zur Geltung. Wir bemerken an ihnen ferner die folgende Regelmässigkeit, welche für einen Primzahlgrad $n = p$ allgemein gilt: Alle Coefficienten der Gleichung mit Ausnahme des vorletzten sind durch p theilbar; der letzte Coefficient ist gleich $\pm p$, je nachdem $p \equiv \pm 1 \pmod 4$.

21.V.96. Historische Notizen über die Multiplicatorgleichung finden sich Modulf. II pg. 80. Wir erwähnen hiervon zunächst, was sich auf

die Bezeichnung „Multiplicator" bezieht. Die Grösse M tritt in dieser Hinsicht zum ersten Male auf bei

Klein, Math. Ann. Bd. 14, 1878,

u. zw. bei der Transformation der elliptischen Integrale in der Weierstrassischen Normalform. Offenbar ist das Weierstrassische Integral

$$\int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$$

homogen von der $+1^{\text{ten}}$ Dimension in w_1, w_2. Um es zu einer Grösse 0ter Dimension zu machen, kann man $\sqrt{\Delta}$ als Factor hinzufügen. Darauf werden wir es als „normirtes Weierstrassischen Integral" bezeichnen.

In der Transformationstheorie vergleicht man nun zwei Weierstrassische Integrale, wobei direct

$$\int \frac{dp'}{\sqrt{4p'^3 - g_2' p' - g_3'}} = \int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}},$$

Will man aber normirte Integrale betrachten, so wird man die vorher

gehende Gleichung durch die folgende, übrigens genau dasselbe besagende, ersetzen:

$$\int \frac{\sqrt[12]{\Delta'}\, dp'}{\sqrt{4p'^3 - g_2' p' - g_3'}} = \frac{16}{n} \int \frac{\sqrt[12]{\Delta}\, dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}.$$

Hier sehen wir, spielt die Grösse $\frac{16}{n}$ die Rolle eines Multiplicators; sie tritt an die Stelle desjenigen Multiplicators, welcher in der älteren Theorie bei der Transformation der Jacobi'schen Normalintegrale vorkommt.

Die Eigenschaften der Multiplicatorgleichung werden vom Standpunkte der Modulfunctionen, d.h. durch Betrachtungen in der w-Ebene, begründet in der grossen Arbeit von Hurwitz, Math. Ann. Bd. 18, 1881.

Von anderer Seite ist Kiepert zu den Multiplicatorgleichung. gekommen, man vergleiche ins Besondere die zusammenfassende

rbeit:
Kiepert, Math. Ann. Bd. 26, 1885.
Kiepert geht von dem sog. speciellen
Teilungsproblem der elliptischen
unctionen aus. Die Grösse 16_1 (für
elche K. übrigens L^e sagt) erscheint
i ihm durch die Wurzeln der Thei-
ngsgleichung

$$p\left(\frac{\lambda w_1 + \varrho w_2}{n}\right), \; p'\left(\frac{\lambda w_1 + \varrho w_2}{n}\right)$$

usgedrückt. Die Multiplicatorglei-
ung wird so zu einer Resolvente
er Theilungsgleichung. Unter den
eichhaltigen Details der Kiepert'
chen Arbeiten heben wir ins Beson-
dere hervor, dass hier die Darstel-
ung der Grössen g_2', g_3' bez. J'
urch 16_1 sowie durch die (als ra-
ional bekannt anzusehenden)
rössen g_2, g_3 bez J gegeben
ird. Es ist dieses die Ausfüh-
ung zu einer Bemerkung, wel-
he wir auf pg. 61 machten,
onach man unter den Grössen

gehende Gleichung durch die folgende, übrigens genau dasselbe besagende, ersetzen:

$$\int \frac{\sqrt[12]{\Delta'}\, dp'}{\sqrt{4p'^3 - g_2' p' - g_3'}} = \frac{16}{n} \int \frac{\sqrt[12]{\Delta}\, dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}.$$

Hier sehen wir, spielt die Grösse $\frac{16}{n}$ die Rolle eines Multiplicators; sie tritt an die Stelle desjenigen Multiplicators, welcher in der älteren Theorie bei der Transformation der Jacobi'schen Normalintegrale vorkommt.

Die Eigenschaften der Multiplicatorgleichung werden vom Standpunkte der Modulfunctionen, d.h. durch Betrachtungen in der w-Ebene, begründet in der grossen Arbeit von Hurwitz, Math. Ann. Bd. 18, 1881.

Von anderer Seite ist Kiepert zu den Multiplicatorgleichung gekommen, man vergleiche ins Besondere die zusammenfassende

Arbeit:

Kiepert, Math. Ann. Bd. 26, 1885.

Kiepert geht von dem sog. speciellen Theilungsproblem der elliptischen Functionen aus. Die Grösse 16_i (für welche K. übrigens L^2 sagt) erscheint bei ihm durch die Wurzeln der Theilungsgleichung

$$\wp\left(\frac{\lambda w_1 + \varrho w_2}{n}\right),\ \wp'\left(\frac{\lambda w_1 + \varrho w_2}{n}\right)$$

ausgedrückt. Die Multiplicatorgleichung wird so zu einer Resolvente der Theilungsgleichung. Unter den reichhaltigen Details der Kiepert'schen Arbeiten heben wir ins Besondere hervor, dass hier die Darstellung der Grössen g_2', g_3' bez. J' durch 16_i, sowie durch die (als rational bekannt anzusehenden) Grössen g_2, g_3 bez. J gegeben wird. Es ist dieses die Ausführung zu einer Bemerkung, welche wir auf pag. 61 machten, wonach man unter den Grössen

des Körpers (f', f) möglichst einfache (eben unser 16) aufsuchen und durch diese sowie durch die rational bekannten Grössen alle übrigen darstellen sollte. Diese Darstellung wird von Kiepert explicite geleistet.

In dem Buche von Weber wird die Gleichung für 16 als „invariante Multiplicatorgleichung" bezeichnet, weil die Grösse 16 mit den „Invarianten" g_2, g_3 zusammenhängt. Diese Bezeichnung scheint uns nicht zweckmässig. Will man die Multiplicatorgleichung für 16 von anderen Multiplicatorgleichungen, wie solche ja in der Jacobi'schen Theorie vorkommen, unterscheiden, so sollte man sie als Multiplicatorgleichung 1ter Stufe bezeichnen, denn auch die Jacobi'sche Multiplicatorgleichung bleibt bei gewissen w-Substitutionen invariant, nur nicht bei den Substitutionen der 1ten sondern bei denen der 2ten Stufe.

Wir werden jetzt die ganze Fragestellung verallgemeinern, indem wir eine Transformationstheorie bei beliebiger Stufenzahl entwickeln. Hiervon handelt ein besonderes Capitel der Modulf. (Bd. II, Cap. 3)

Es sei $\varphi(w)$ eine Modulfunction etwa von der r^{ten} Stufe. Bei einer Transformation n^{ter} Ordnung geht dieselbe über in $\varphi\left(\frac{w}{n}\right)$. Hier entsteht nun die Aufgabe, den algebraischen Zusammenhang zwischen $\varphi\left(\frac{w}{n}\right)$ und $\varphi(w)$ in ähnlicher Weise zu untersuchen, wie es mit der algebraischen Beziehung zwischen $f\left(\frac{w}{n}\right)$ und $f(w)$ geschehen ist.

Das allgemeine Resultat, welches sich in dieser Hinsicht ergiebt, lautet folgendermassen:

Solange r und n relativ prim sind, liegt alles ähnlich wie bei den Functionen der 1ten Stufe. Besonderheiten treten nur auf, wenn r und n einen Theiler gemein

haben. In allen Fällen aber sind die beiden Moduln durch eine algebraische Gleichung verbunden.

Hierzu zunächst einige Beispiele aus der vorhandenen Litteratur. Die sog. „Modulargleichung", welche in der Jacobi'schen Theorie vorkommen, liefern den algebraischen Zusammenhang zwischen dem Modul

$$\sqrt[8]{\lambda(w)} = \sqrt[8]{k}$$

und den durch Transformation n^{ter} Ordnung aus ihm entstehenden Grössen. Der hier betrachtete Modul ist von der 16ten Stufe. Nach der obigen allgemeinen Bemerkung hat man daher zwischen geradem und ungeradem n zu unterscheiden. Für ein ungerades n wird die Theorie der Jacobi'schen Modulargleichung ganz ähnlich ausfallen, wie die Theorie der Gleichung $F(J', J)$.

Ferner erwähnen wir die sogen. Schläfli'schen Modulargleichung

Schläfli beschäftigt sich in Crelle Bd. 72, 1870 mit der Transformation des Moduls 48ter Stufe

$$\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)} = \sqrt[12]{k k'},$$

welcher bemerkenswerthe einfache Resultate liefert, worauf insbesondere Weber in seinem Buche zurückgekommen ist. Da 48 die Primfactoren 2 und 3 enthält, sind hier die geraden und die durch 3 theilbaren Transformationsgrade besonders zu behandeln.

In dieser Vorlesung werde ich indessen die Transformationstheorie des Moduls $\zeta(w)$, d. h. der Ikosaederirrationalität bevorzugen, ohne darum behaupten zu wollen, dass dieser Modul interessanter ist als andere. Es ist mehr, dass ich wünsche, die Ikosaederirrationalität $\zeta(w)$ nach allen Richtungen zur Geltung zu bringen, und dass ich der allgemeinen Untersuchung der höheren Moduln einen neuen An-

stoss geben möchte.

Die Grösse $\zeta(w)$ ist wie wir wissen, Hauptmodul der fünften Stufe. Nun zerfallen Moduln 5 die $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\beta}{\delta}\right)$ Substitutionen in 60 Klassen. Zwischen J und ζ besteht daher eine Gleichung 60ten Grades $J = R_{60}(\zeta)$, die sog. Ikosaedergleichung, die wir schon oben angaben, ihre Wurzeln drükken sich linear durch eine aus. Wir schreiben die 60 Wurzeln in dem folgenden Schema zusammen, in welchem $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ist (Vergl. Ikosaeder pag. 43):

$$\varepsilon^{10}\left\{\ ,\ -\frac{\varepsilon^{\mu}}{\left\{\ \right.}\right.$$

$$\varepsilon^{\mu}\cdot\frac{-(\varepsilon-\varepsilon^{4})\varepsilon^{\nu}\}+(\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3})}{(\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3})\varepsilon^{\nu}\}+(\varepsilon-\varepsilon^{4})}\ ,\quad \varepsilon^{\mu}\cdot\frac{(\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3})\varepsilon^{\nu}\}+(\varepsilon-\varepsilon^{4})}{(\varepsilon-\varepsilon^{4})\varepsilon^{\nu}\}+(\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3})}\ .$$

Geben wir hierin μ und ν die Werthe 1, 2, 3, 4, 5, so stellt die erste Zeile 2×5, die zweite 2×25 Werthe dar. Im Ganzen haben wir hier die 60 Wurzeln der Ikosaedergleichung vor uns.

Wir haben hier vor allen Dingen

zu constatiren, daß die Coefficienten der angeschriebenen Substitutionen nicht im natürlichen, sondern in dem durch die 5te Einheitswurzel erweiterten Rationalitätsbereiche liegen. Daher können wir die Ikosaedergleichung nur dann als Galois'sche Gleichung bezeichnen, wenn wir diese Einheitswurzel adjungiren.

Das Hereinspielen der Zahlenirrationalität ε ist für uns besonders interessant. Wir werden uns später darüber klar werden müssen, welche Folgen dieser Umstand für die Theorie der singulären elliptischen Gebilde hat, nämlich für denjenigen von uns zu entwickelnden Theil dieser Theorie, der sich mit der Ikosaederirrationalität $\zeta(w)$ beschäftigt.

22. V. 96. Um Anschluß an die Formentheorie zu gewinnen, werden wir die Ikosaedergleichung homogen machen, indem wir $s = s_1/s_2$; sie lautet dann:

$$J : J-1 : 1 = H^3(\xi_1, \xi_2) : -T^2(\xi_1, \xi_2) : 1728 f$$

Die Formen H, T und f, welche bez. von der 20ten, 30ten und 12ten Dimension sind, haben ein einfaches Bildungsgesetz. Nennen wir f die Grundform, so wird nämlich H die Hesse'sche Form von f und T die Functionaldeterminante von f und H. Man erkennt hier den Nutzen der homogenen Variabelen. Übrigens haben wir

$$f = \xi_1 \xi_2 (\xi_1^{10} + 11 \xi_1^5 \xi_2^5 - \xi_2^{10})$$

Ebenso wie die Variable ξ werden wir auch die Substitutionen von ξ homogen spalten. Wir richten es so ein, daß die entstehende binäre Substitution die Determinante 1 erhält und sprechen dann von einer <u>unimodularen binären Substitution</u>. Z. B. erreichen wir dieses bei der Substitution

$$\zeta' = \varepsilon\zeta$$

dadurch dass wir setzen

$$\zeta_1' = \pm\varepsilon^3\zeta$$
$$\zeta_2' = \pm\varepsilon^2\zeta_2.$$

Bei dieser Spaltung bleibt nothwendiger Weise ein Vorzeichen unbestimmt, so dass sich die Zahl der Substitutionen von 60 auf 120 vergrössert. Ebenso wie die nicht-homogene Ikosaedergleichung bei den pag 76 angegebenen 60 nicht-homogenen Substitutionen von ζ, bleibt die homogen-gemachte Ikosaedergleichung und sogar die einzelne Form f, H und T bei den 120 homogenen unimodularen Substitutionen von ζ_1, ζ_2 ungeändert.

Wir kommen nun zu der Transformationstheorie des Moduls $\vartheta(w)$. Dieselbe ist ausführlich von Friedrich in seiner Dissertation, Leipzig 1886 behandelt. Vergl. andererseits Hodulf. II pag 150. Setzen wir den Transformationsgrad

zu 5 relativ prim voraus, so bekommen wir ganz ähnliche Resultate wie pag. 28 für die 1te Stufe.

1. Zunächst wissen wir, dass

$$\zeta = f(w)$$

bei den Substitutionen der Hauptcongruenzgruppe 5ter Stufe und bei keinen anderen Umänderungen von w ungeändert bleibt. Wir wollen dieselben durch die Schreibweise

$$w' = \frac{Aw+B}{Cw+D} \quad \begin{pmatrix} A \equiv D \equiv 1 \pmod 5 \\ B \equiv C \equiv 0 \pmod 5 \end{pmatrix}$$

kenntlich machen.

2. Sodann fragen wir, bei welchen dieser Substitutionen die transformirte Grösse

$$\zeta' = f\left(\frac{w}{n}\right)$$

ungeändert bleibt. Wir können unsere Substitution ersichtlich so schreiben:

$$\frac{w'}{n} = \frac{A\left(\frac{w}{n}\right) + \frac{B}{n}}{Cn\left(\frac{w}{n}\right) + D}$$

und erkennen sofort, dass $\zeta\left(\frac{w}{n}\right)$

ungeändert bleibt, wenn nur $\frac{B''}{n}$ eine ganze Zahl ist. Dieselbe Bedingung haben wir pg. 39 bei der Transformation von J kennen gelernt. Das Besondere ist hier nur, daß B'' von vornherein bereits der Congruenz $B'' \equiv 0 \pmod 5$ genügt. Es ist nun verständlich, daß diese beiden Congruenzen in keiner Weise collidiren, sofern wir n relativ prim zu 6 voraussetzen, wie wir es thaten, und das weiterhin eine ganz ähnliche Transformationstheorie herauskommt, wie auf der 1ten Stufe.

3. Wir bestimmen jetzt den Index derjenigen Untergruppe, welche aus der Hauptcongruenzgruppe 6ter Stufe durch die Bedingung

$$B'' \equiv 0 \pmod n$$

ausgesondert wird. Derselbe ergiebt sich wie früher zu

$$\psi(n) = \left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\ldots$$

Die Substitutionen $\begin{pmatrix} A & B'' \\ C & D \end{pmatrix}$ zer-

fallen also für uns in $\Psi(n)$ Classen. In jeder Classe können wir wie früher einen Repräsentanten wählen etc. etc.

4. Dementsprechend besteht der Fundamentalbereich unserer Untergruppe aus $\Psi(n)$ Einzelbereichen, d.h. hier aus $\Psi(n)$ Ikosaedernetzen, deren jedes seinerseits aus 60 Doppeldreiecken der ursprünglichen Modultheilung besteht.

5. Der nächste Schritt wird der sein, dass wir das Verhalten von $\zeta'(\omega)$ und $\zeta(\omega)$ in dem genannten Fundamentalbereiche durch Aufstellen von Reihenentwickelungen in ähnlicher Weise wie pag. 49 untersuchen. Dabei zeigt sich, dass ζ und ζ' relativ zum Fundamentalbereiche keine wesentliche Singularitäten haben.

6. Hiermit besteht zwischen ζ und ζ' eine algebraische Relation, welche wir vorläufig so schreiben wollen:

$$f_1(\xi', \xi) = 0.$$

Sie ist vom Grade $\Psi(n)$ in jeder der beiden Variabeln, besitzt ganzzahlige Coefficienten etc. Wir bezeichnen sie als Transformationsgleichung n^{ter} Ordnung der Ikosaederirrationalität.

Nun wäre die Frage, wie wir diese Gleichung wirklich aufstellen können. Zunächst möchte es scheinen, dass dieses im jetzigen Falle noch umständlicher sein wird, wie im Falle der Transformationsgleichung bei Zugrundelegung des j. In Wirklichkeit aber geht es viel einfacher.

Der Grund hiervon liegt in den besonderen algebraischen Eigenschaften unserer Gleichung, welche sich aus der Betrachtung der w-Ebene ergeben. Wir lassen w von einem Anfangswerthe aus in andere vermöge der Gesamtgruppe aequivalente Werthe über

gehen. Dabei erleidet $\xi(w)$ die sämmtlichen 60 Ikosaedersubstitutionen, sofern wir nur auf w aus jeder der modulo 5 unterschiedenen 60 Classen von Substitutionen mindestens eine ausüben. Wir thun dieses, indem wir die folgenden Substitutionen betrachten ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen von der Determinante ± 1):

$$w' = \frac{\alpha w + \beta n}{\gamma w + \delta}$$

Dieselben enthalten in der That, da n zu 5 relativ prim ist, Substitutionen aus allen 60 Classen unter sich. Hiebei haben wir

$$\xi\left(\frac{\alpha w + \beta n}{\gamma w + \delta}\right) = S(\xi),$$

wo $S(\xi)$ eine Ikosaedersubstitution bedeutet u. zw. jede beliebige, wenn wir $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ geeignet verändern.

Zu gleicher Zeit erleidet aber auch $\xi'(w)$ eine Ikosaedersubstitution. Wir haben nämlich:

$$\zeta\left(\frac{1}{n}\,\frac{\alpha w+\beta n}{\gamma w+\delta}\right)=\zeta\left(\frac{\alpha\frac{w}{n}+\beta}{\gamma n.\frac{w}{n}+\delta}\right)=S'(\zeta'),$$

unter S' wieder eine geeignete Ikosaedersubstitution verstanden.

"Wenn also ζ übergeht in $S(\zeta)$, wobei die Substitution S dem Schema entspricht: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta n\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, so verwandelt sich ζ' in $S'(\zeta')$, wo nun S' durch das folgende Schema bestimmt wird: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma n & \delta\end{pmatrix}$.

Lassen wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle möglichen Werthe durchlaufen, so erleidet ζ alle möglichen Ikosaedersubstitutionen und ζ' gewisse jenen in gesetzmässiger Weise zugeordnete simultane Ikosaedersubstitutionen. Dabei genügt es schon, für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die sämmtlichen modulo 5 genommenen Zahlen zu setzen, die $\alpha\delta-\beta\gamma\equiv 1$ ergeben, weil 2 nach dem Modul 5 congruente Substitutionen eo ipso die gleichen Werthe von ζ und ζ' ergeben.

Die somit aufgefundene Eigenschaft der Wurzeln unserer Gleichung wollen wir als eine Eigenschaft der Gleichung selbst formuliren. Wir können dann sagen: Unsere Gleichung $f_1(\xi', \xi) = 0$ bleibt bei gewissen simultanen Ikosaedersubstitutionen der Variabeln ξ', ξ ungeändert. Des Genauern müssen wir 4 Fälle unterscheiden, je nachdem $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 5$ ist.

Die Zusammenordnung der simultanen Substitutionen wird besonders einfach im Falle $n \equiv 1 \pmod 5$. Alsdann sind nämlich die auf der vorigen Seite angegebenen Schemata nach dem Modul 5 überhaupt nicht verschieden. Hiebei bleibt in diesem Falle die Gleichung $f_1(\xi', \xi) = 0$ ungeändert, wenn wir ξ und ξ' denselben, übrigens beliebigen Ikosaedersubstitutionen unterwerfen, oder, wie wir sagen können, wenn wir ξ und ξ' cogredient substituiren.

Hinsichtlich der anderen Fäl-

le theilen wir Folgendes ohne Beweis mit: man erhält aus der Substitution von ξ' die zugehörige von ξ, wenn man die in jener vorkommende Grösse ε durch ε^n ersetzt. Bei der so hergestellten simultanen Substitution von ξ, ξ' bleibt dann die Gleichung $f_1'(\xi, \xi') = 0$ wiederum ungeändert.

Im Folgenden beschränken wir uns der Kürze halber auf den Fall $n \equiv 1 \pmod 5$. Um aus der geschilderten algebraischen Eigenthümlichkeit ein Verfahren zur Herstellung der Gleichung abzuleiten, nehmen wir wieder Bezug auf die Formentheorie. Wir schreiben unsere Gleichung homogen-machend

$$f_1'(\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2) = 0$$

und üben auf die Variabeln cogrediente binäre uniimodulare Ikosaedersubstitutionen aus. Dann bleibt nicht nur die Gleichung

sondern auch die linke Seite der Gleichung, d. h. die Form $f(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2)$ ungeändert. Im Uebrigen bemerken wir, ohne es hier auszuführen, dass f auch bei Vertauschung der ξ und ξ' ungeändert bleiben muss.

Wir suchen nun zunächst die einfachsten Formen dieser Art auf und bilden das vollständige System solcher Formen, aus denen sich alle übrigen Formen rational und ganz darstellen lassen. Wir können sofort vier doppelt-binäre Formen in $\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2$ angeben, welche in diesen beiden Variabelreihen symmetrisch sind, bei Ausübung unserer simultanen Ikosaedersubstitutionen ungeändert bleiben. Es sind dieses:

$$A_1 = \xi_1 \xi_2' - \xi_2 \xi_1'$$

$A_6 = 6^{\text{ten}}$ Polare von $f(\xi_1, \xi_2)$,

$A_{10} = 10^{\text{ten}}$ " " $H(\xi_1, \xi_2)$,

$A_{15} = 15^{\text{ten}}$ " " $T(\xi_1, \xi_2)$.

Dass die Form A_1 oder vielmehr die geraden Potenzen von A_1 (und andere kommen weiterhin nicht vor) die genannten Eigenschaften besitzen, ist von vornherein klar. Was A_6, A_{10}, A_{15} betrifft, so wird bei der Polarenbildung der Grad von f, H, T in ξ, welcher bez. gleich 12, 20, 30 ist, auf 6, 10, 15 Einheiten verringert, wofür der Grad in ξ' auf 6, 10, 15 ansteigt. Dass diese Formen bei den simultanen Ikosaedersubstitutionen invariant bleiben, folgt aus der Invarianten-Natur des Polarenprozesses und daraus, dass die Formen f, H, T sich bei Ikosaedersubstitutionen von ξ_1, ξ_2 nicht ändern.

Es zeigt sich nun weiter, dass die angeschriebenen vier Formen das volle Formensystem für die Invarianten der Ikosaedersubstitutionen bilden. Daraufhin können wir unsere gesuchte Form f als ganze Function der A_1, A_6, A_{10},

A_{15} mit unbestimmten Coefficien-
ten ansetzen.

Die Möglichkeit dieses Verfahrens ist durchaus an die homogene For-
mulirung des Problems gebunden.
Wegen der allgemeinen Durchführung vgl. die genannte Dissertation von Friedrich oder auch Kodulf. II pg. 137-141, wo auch die Fälle $n = 2, 3, 4 \pmod 5$ berücksichtigt sind.

Hier wollen wir uns auf ein Zahlen-
beispiel beschränken, indem wir $n = 11$ nehmen. Nach der Rechnung von Friedrich, die sich auf die Reihenentwickelungen von ζ und ζ' stützt, lautet die Transforma-
tionsgleichung, welche vom Grade $\psi(n) = 12$ ist, folgendermassen:

$$11 \cdot 17 \cdot A_\zeta^2 - 18 \cdot 49 A_1^2 A_{10}^2 - 8 \cdot 11 \cdot 935 A_1^6 A_\zeta^6 - 17 \cdot 7584 A_1^{11} \cdot \zeta$$

Wir bemerken noch, dass an die Ausrechnung der entsprechenden Transformationsgleichung für $f f'$ gar nicht zu denken ist,

da schon die Transformationsgleichung 3ter Ordnung, wie wir sahen, ausserordentlich complicirt war. Die relativ einfache Gestalt der Transformationsgleichungen für ζ, ζ' liegt in der Einführung der Aggregate A_1, A_6, A_{10}, A_{15} begründet, die allerdings ihrerseits ziemlich complicirte Functionen von ζ, ζ' sind.

Mit der Aufstellung der einen Gleichung $f_1(\zeta', \zeta) = 0$ ist indessen die Theorie der Transformationen 5ter Stufe nicht abgeschlossen. Wir können nämlich statt des willkürlich herausgegriffenen Werthes $\zeta(w)$ ebenso gut ausgehen von einem der 59 anderen Werthe $\zeta\left(\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}\right)$, wo die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ modulo 5 zu unterscheiden sind. Es bedeutet dieses nichts Anderes, als dass wir den Werth von ζ einer der 60 Ikosaedersubstitutionen unterwerfen. Zu jedem dieser Werthe können wir dann die zugehörige Gleichung vom Grade $\nu(n)$ auf-

stellen, welche ihn mit dem transformirten Werthe $\xi' = \xi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ verbindet. Diese 60 Gleichungen müssen natürlich übereinstimmen mit denjenigen, die man aus $f(\xi', \xi) = 0$ ableitet, indem man auf ξ allein die 60 Ikosaedersubstitutionen ausübt.

In entsprechender Weise könnten wir auch mit ξ' verfahren, indem wir $\xi'(\omega)$ durch $\xi'\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$ ersetzen. Es scheint hiernach, dass wir aus jeder der vorgenannten 60 Gleichungen abermals 60 neue Gleichungen erhalten, im Ganzen also 3600. Dem ist aber nicht so; denn jede von diesen Gleichungen geht durch gewisse 60 simultane Ikosaedersubstitutionen für ξ und ξ' in sich über, wie wir es gerade für f, sahen und von da aus für die übrigen erschliessen.

Es bleiben also nur 60 ver-

verschiedene Gleichungen übrig. Diese Gleichungen seien:

$$f_1(\xi;\xi) = 0$$
$$f_2(\xi;\xi) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_{60}(\xi;\xi) = 0$$

Hier entsteht die interessante Aufgabe, diese 60 Gleichungen in ihren gegenseitigen Beziehungen neben einander zu betrachten. Hier kommt vor allem der Begriff gleichberechtigter Gleichungen zur Geltung. Wir werden nämlich zwei Gleichungen dann gleichberechtigt nennen, wenn wir sie dadurch in einander überführen können, dass wir auf ξ' und ξ gleichlautende Ikosaedersubstitutionen oder, wie man auch sagt, cogrediente Ikosaedersubstitutionen, ausüben. Doch können wir Näheres hierüber erst später mittheilen.

stellen, welche ihn mit dem transformirten Werthe $\xi' = \xi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ verbinden. Diese 60 Gleichungen müssen natürlich übereinstimmen mit denjenigen, die man aus $f(\xi', \xi) = 0$ ableitet, indem man auf ξ allein die 60 Ikosaedersubstitutionen ausübt.

In entsprechender Weise können wir auch mit ξ' verfahren, indem wir $\xi'(\omega)$ durch $\xi'\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$ ersetzen. Es scheint hiernach, dass wir aus jeder der vorgenannten 60 Gleichungen abermals 60 neue Gleichungen erhalten, im Ganzen also 3600. Dem ist aber nicht so; denn jede von diesen Gleichungen geht durch gewisse 60 simultane Ikosaedersubstitutionen für ξ und ξ' in sich über, wie wir es gerade für f, sahen und von da aus für die übrigen erschliessen.

Es bleiben also nur 60 un-

verschiedene Gleichungen übrig. Diese Gleichungen seien:

$$f_1(\xi;\xi) = 0$$
$$f_2(\xi;\xi) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_{60}(\xi;\xi) = 0$$

Hier entsteht die interessante Aufgabe, diese 60 Gleichungen in ihren gegenseitigen Beziehungen neben einander zu betrachten. Hier kommt vor allem der Begriff gleichberechtigter Gleichungen zur Geltung. Wir werden nämlich zwei Gleichungen dann gleichberechtigt nennen, wenn wir sie dadurch in einander überführen können, dass wir auf ξ' und ξ gleichlautende Ikosaedersubstitutionen oder, wie man auch sagt, cogrediente Ikosaedersubstitutionen, ausüben. Doch können wir Näheres hierüber erst später mittheilen.

Zweiter Haupttheil.

Composition zusammengehöriger ganzzahliger Gitter.

4. VI. 96. Wir wenden uns nun zu neuen arithmetischen Entwicklungen betr. ganzzahlige Gitter. Dieselben sollen uns hernach gute Dienste leisten, wenn wir fragen, wie sich die allgemeine Transformationstheorie der elliptischen Functionen im Falle ganzzahliger Gitter modificieren mag. Das Specifische unserer neuen Betrachtungen ist, dass wir immer diejenigen ganzzahligen Formenclassen, welche zu derselben Discriminante D gehören, neben einander betrachten. Wir lernten früher (vergl. Teil I pg 169), dass die Zahl dieser Classen eine endliche ist. Unter den Discriminan-

ten überhaupt sind von besonderer Wichtigkeit diejenigen, welche wir pag. 33 Stammdiscriminanten nannten und welche wir mit d bezeichnen wollen. Ihre Wichtigkeit beruht auf dem Satze von pag. 33, nach welchem alle Gitter, deren Discriminante keine Stammdiscriminante ist, sondern aus einer solchen durch Multiplication mit n^2 hervorgeht, aus Stammgittern durch Transformation n^{ter} Ordnung gewonnen werden. Die Stammdiscriminanten zerfallen, wie gleichfalls pag. 33 hervorgehoben, in zwei Arten, je nachdem d durch 4 theilbar ist oder nicht.

Ist $d \equiv 0 \pmod 4$, so bezeichnen wir d als Stammdiscriminante erster Art, ist $d \equiv 1 \pmod 4$, so bezeichnen wir d als Stammdiscriminante zweiter Art. Unter den zu gleicher Stammdiscriminante gehörigen Formen giebt es eine ausgezeichnete, welche Hauptform heisst.

Und zwar definiren wir

$X^2 - \frac{d}{4} y^2$ als Hauptform erster Art

$X^2 + Xy + \frac{1-d}{4} y^2$ als Hauptform zweiter Art.

Allemal konnten wir eine quadratische Form in zwei Linearfactoren spalten, welche wir als Gitterzahlen oder auch als Minimalcoordinaten bezeichneten. Diese Grössen waren nur bis auf einen willkürlichen Factor bestimmt, den sog. Azimuthalfactor. Wir setzen bereits fest, dass bei negativer Discriminante der Azimuthalfactor den absoluten Betrag 1 haben (vergl. Teil I pag 67) und dass er bei positiver Discriminante reell sein sollte (vergl. Theil I pag 78). Das Product zweier zusammengehöriger Azimuthalfactoren musste dabei stets gleich 1 sein.

Speciell liegt nun bei den Hauptformen eine bestimmte Art der Spaltung besonders nahe, welche wir

hiermit verabreden wollen. Wir werden eine Hauptform erster Art in die Factoren

$$\xi = x + \frac{\sqrt{d}}{2} y, \quad \eta = x - \frac{\sqrt{d}}{2} y$$

und eine Hauptform zweiter Art in

$$\xi = x + \frac{1+\sqrt{d}}{2} y, \quad \eta = x + \frac{1-\sqrt{d}}{2} y$$

auflösen, wodurch bei den Hauptformen die Azimuthalfactoren festgelegt sind.

Wir wollen ferner für die Hauptformen eine feste Art der geometrischen Darstellung verabreden, indem wir ihnen ein ganz bestimmtes Gitter coordiniren. Aus dem ersten Theile dieser Vorlesung wissen wir, daß wir jeder Form jedes beliebige Gitter zuordnen können, wofern wir nur die Maassbestimmung in der Ebene geeignet definiren. Indessen ist es bequem, bei den folgenden Betrachtungen speciell in folgender Art zu verfahren:

Es handle sich zuerst um

Hauptformen erster Art. Je nachdem d positiv oder negativ ist, haben wir noch zwei verschiedene Fälle von Hauptformen erster Art zu unterscheiden. Wir gehen von einem rechtwinkligen Coordinatensystem u, v aus, wobei jedem Punkt der Ebene in gewöhnlicher Weise zwei Coordinaten u, v entsprechen. Wir setzen dann

bei positivem d

$$x = u \quad , \quad y = \frac{2v}{\sqrt{d}} \quad ,$$

bei negativem d

$$x = u \quad , \quad y = \frac{2iv}{\sqrt{d}} \quad .$$

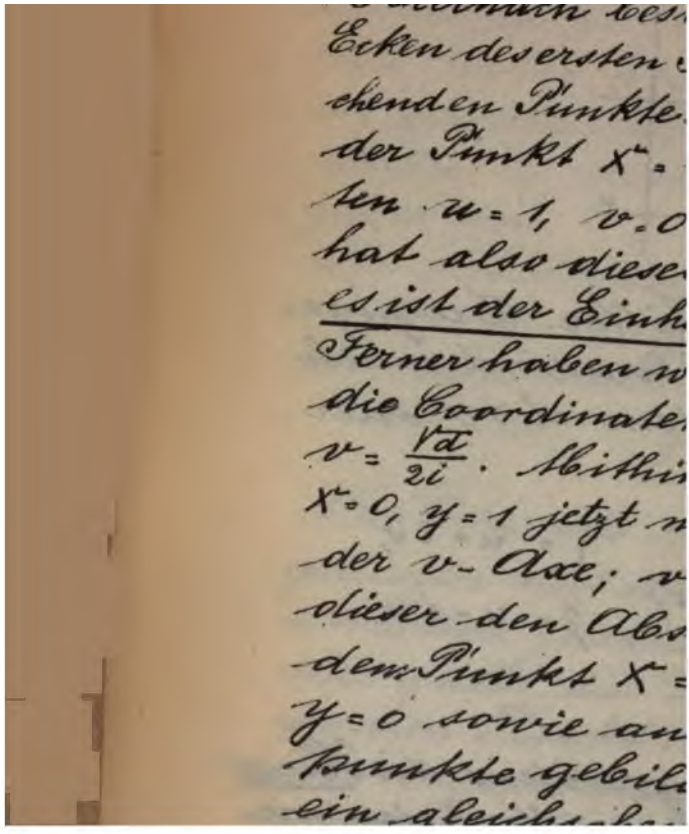
Die Gitterecke $x = 1, y = 0$ wird infolgedessen mit dem Punkte $u = 1, v = 0$ der Ebene zusammenfallen. Andrerseits fällt die Gitterecke $x = 0, y = 1$ in den Punkt $u = 0, v = \frac{\sqrt{d}}{2}$ bez. (bei negativem d) in den Punkt $u = 0, v = \frac{\sqrt{d}}{2i}$. Durch die genannten beiden Eckpunkte und den Anfangspunkt ist ein erstes Parallelogramm unseres Gitter und

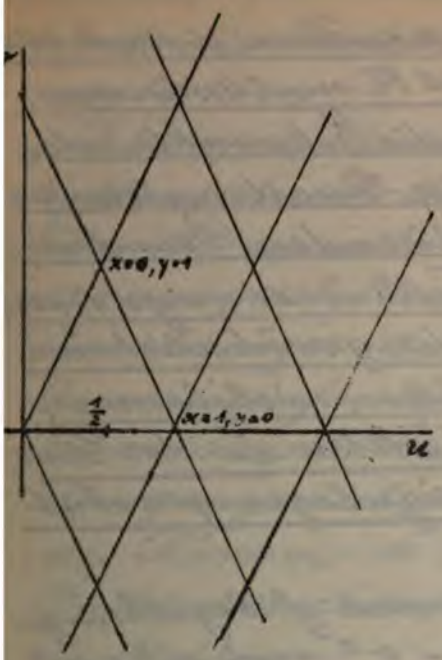
weiterhin das ganze Gitter bestimmt. Das Gitter wird, wie man sieht (vergl. die folgende Figur),

ein <u>rechteckiges Gitter</u>. Die zugehörigen Gitterzahlen sind nach pag 97, je nachdem $d > 0$ oder $d < 0$ ist:

$$\xi = u+v, \qquad \eta = u-v \qquad \text{bez.} \qquad \xi = u+iv, \qquad \eta = u-iv.$$

Wir betrachten zweitens die <u>Hauptformen zweiter Art</u>. Nachdem wir, wie vorher, ein gewöhnliches rechtwinkliges Coordinatensystem u, v definirt haben, setzen wir im





gramm unseres Gitters einen Rhombus. Den Hauptformen zweiter Art entspricht also in Folge unserer Verabredung ein <u>rhombisches Gitter</u>. Die zugehörigen Gitterzahlen drükken sich durch die Coordinaten u und v gerade so aus, wie bei den Hauptformen erster Art; es wird nämlich

$$\left.\begin{aligned}\xi &= u + v\\ \eta &= u - v\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\xi &= u + iv\\ \eta &= u - iv.\end{aligned}\right\}$$

bez.

Wir können, zusammenfassend für beide Formenarten, die geometrische Bedeutung der Gitterzahlen in

der u, v- Ebene dadurch beschreiben, dass wir sagen:

Im Falle eines positiven d sind die Gitterzahlen die mit $\sqrt{d}$ multiplicirten Abstände, welche die Eckpunkte des Gitters von den die Quadranten der u, v- Ebene halbirenden Geraden besitzen. Im Falle eines negativen d aber sind es die gewöhnlichen complexen Zahlen, welche man den Gittereckpunkten in der Gauss'schen Ebene beizulegen gewohnt ist.

In der That wird f beziehungsweise gleich $u^2 - v^2$ und $u^2 + v^2$ sein.

Wir werden nun zeigen, dass die hiermit durchgeführte Construction der Hauptgitter in dem allerengsten Zusammenhange mit der Theorie der quadratischen Körper steht, welche sonst in abstracter Weise entwickelt wird und die hier in ihren Grundlagen als bekannt vorausgesetzt werden

soll (vergl. etwa die Darstellung in Dedekind's Zahlentheorie oder auch die Protocolle des Wintersemi-nars).

Ein quadratischer Körper wird definirt durch die Irrationalität $\sqrt{m}$, wo m als quadratfreie Zahl vorausgesetzt wird, indem nämlich ein etwaiger quadratischer Theiler von m für den Körper irrelevant wäre. Bestimmt man nun die ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $k(\sqrt{m})$, so wird eine Fallunterscheidung nöthig, je nachdem

$$m \equiv 2 \text{ bez. } \equiv 3 \pmod 4$$

oder

$$m \equiv 1 \pmod 4$$

ist. Im ersten Falle haben die ganzen Zahlen des Körpers die Gestalt:

$$x + y\sqrt{m};$$

im zweiten Falle sind sie dargestellt durch

$$x + y\frac{1+\sqrt{m}}{2},$$

wo beidemal unter x und y ganze rationale Zahlen verstanden werden. Als Basis des Körpers haben wir hiernach zu bezeichnen:
im ersten Falle die beiden Grössen

$$1, \sqrt{m},$$

im zweiten Falle die beiden folgenden Zahlen

$$1, \frac{1+\sqrt{m}}{2}$$

Als Discriminante dieses Körpers definirt man bekanntlich das Quadrat der aus der Basis und ihren conjugirten Werthen gebildeten Determinante. Hiernach wird im ersten Falle:

$$d = \begin{vmatrix} 1, & \sqrt{m} \\ 1, & -\sqrt{m} \end{vmatrix}^2 = 4m$$

im zweiten Falle dagegen:

$$d = \begin{vmatrix} 1, & \frac{1+\sqrt{m}}{2} \\ 1, & \frac{1-\sqrt{m}}{2} \end{vmatrix}^2 = m.$$

Den ganzen algebraischen Zahlen des Körpers können wir hiernach im einen oder anderen Falle bez.

die Form geben:

$$x + y\frac{\sqrt{d}}{2} \quad \text{bez.} \quad x + y\frac{1+\sqrt{d}}{2}.$$

Das sind aber, wie wir sehen, genau dieselben Verbindungen, welche wir oben (pag 96) als Gitterzahlen ξ bezeichneten und aus den zur Discriminante d gehörigen Hauptformen 1ter und 2ter Art ableiteten. Das heisst also: die zu der Hauptform einer Stammdiscriminante d vermöge unserer Verabredungen gehörigen Gitterzahlen ξ sind mit den ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $k(d)$ genau identisch.

Unsere Gitterbetrachtung weist uns aber darauf hin, neben den Gitterzahlen ξ gleichzeitig die Gitterzahlen η im Auge zu haben. Für die Körpertheorie ergiebt sich daraus, dass wir neben dem Körper $\sqrt{d}$ (welcher von dem Körper $\sqrt{m}$ ersichtlich nicht verschieden ist) gleichzeitig den conjugirten Kör-

per $-\sqrt{d}$ stellen sollen.

Diese Modification der Betrachtung ist allerdings im Falle des quadratischen Körpers keine eigentliche Erweiterung; da nämlich $-\sqrt{d}$ ersichtlich rational durch $+\sqrt{d}$ ausgedrückt werden kann, so ist $R(-\sqrt{d})$ mit $R(+\sqrt{d})$ identisch. Dieselbe sehr selbstverständliche Thatsache meint man, wenn man sagt: Der quadratische Körper ist ein Galois'scher Körper: oder: die quadratische Gleichung ist eine Galois'sche Gleichung. Trotzdem ist die durch unser Gitter indicirte consequente Nebeneinanderstellung der Zahlen $x + y\frac{\sqrt{d}}{2}$ und $x - y\frac{\sqrt{d}}{2}$ etc. sehr nützlich. Es gilt das in verstärktem Maasse, wenn wir zu höheren Körpern schreiten. Wie sich unser geometrisches Bild auf diese höheren Fälle erweitert, ist unmittelbar verständlich. Wir haben dann nicht ein von Geraden gebildetes Gitter in der Ebene,

sondern ein Gitter im R_n zu betrachten, welches von einem Systeme paralleler aequidistanter R_{n-1} gebildet wird. Die discontinuirliche Anordnung der Gitter-Eckpunkte im R_n ist etwas durchaus übersichtliches. Dementsprechend wird sich bei gleichzeitiger Betrachtung der zu jedem Gitterpunkte gehörigen n Coordinaten (Gitterzahlen) eine übersichtliche Theorie der Gitterzahlen ergeben. Beschränken wir uns aber nur auf einen der n conjugirten Körper, d. h. auf nur eine der n Coordinaten der Gitterpunkte, so bedeutet dieses geometrisch, dass wir das n-dimensionale Gitter auf eine Mannigfaltigkeit von nur einer Dimension projiciren. Hierbei entsteht natürlich ein verworrenes Bild der räumlichen Anordnung, dessen Punkte auf der gewählten Coordinatenaxe im Allgemeinen überall dicht liegen werden.

Dementsprechend wird die Theorie der Gitterzahlen von diesem beschränkteren Standpunkte aus unübersichtlich werden. Übrigens kommt ja ganz dieselbe Bemerkung in der Theorie der Abel'schen Functionen zur Geltung, welche gerade durch den von Jacobi vollzogenen Übergang zu höheren Dimensionen ihre heutige einfache Gestalt gewonnen hat.

11. VI. 96. Nachdem wir im Vorhergehenden für die Hauptformen eine bestimmte Zerlegung in Factoren und daran anschliessend eine bestimmte geometrische Interpretation verabredet haben, werden wir jetzt das Entsprechende für die Nebenformen (Nebenklassen) durchführen. Ebenso, wie die Theorie der Hauptgitterzahlen übereinstimmt mit der Theorie der gewöhnlichen ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $\sqrt{d}$, so wer-

den wir erkennen, daß die Gitterzahlen der Nebenklassen auf die Idealtheorie des genannten quadratischen Körpers führen.

Es handelt sich um eine beliebige quadratische Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

der Stammdiscriminante $d = b^2 - 4ac$.

Wir zerlegen dieselbe nach dem mehrfach genannten Schema

$$f = \xi\eta,$$

$$\xi = \varrho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2}\,y\right),$$

$$\eta = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{d}}{2}\,y\right),$$

in Linearfactoren. Die geometrische Interpretation der „Gitterzahlen" ξ und η geschieht in derselben Weise, wie pag. 99 bis 101 im Falle der Hauptformen. Wir setzen nämlich

$$\xi = u + (i)\,v$$

$$\eta = u - (i)\,v,$$

welche abkürzende Schreibweise uns im Falle eines positiven oder

negativen d bez. die beiden Gleichungen $= u+v$ oder $= u+iv$ etc. vertreten soll, und deuten u und v als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene. Die Gitterzahlen bc. deuten dann, wie früher, im Falle eines positiven d die mit $\sqrt{2}$ multiplicirten Abstände der Gitterpunkte von den die Quadranten der u, v-Ebene halbirenden Geraden; im Falle eines negativen d dagegen bedeuten sie einfach die den Gitterpunkten in der Gaußischen Ebene zugeordneten complexen Zahlen.

In unserer Verlegung sind die „Azimuthalfactoren" ϱ und $\frac{1}{\varrho}$ vorläufig noch unbestimmt. Ein erster Schritt zu ihrer Festlegung soll der folgende sein:

Wir betrachten neben der Formenclasse, welche die Form (a, b, c) enthält, diejenige, in welcher die Form $(a, -b, c)$ vorkommt. Zwei solche Classen nennen wir <u>conjugirte Klassen</u>. Eine Klasse, wel.

che mit ihrer conjugirten identisch ist, bezeichnen wir, wie schon Theil I pag. 162 hervorgehoben, als Ancepsclasse.

Wir treffen nun die Verabredung, dass conjugirte Gitter mit conjugirten Factoren ϱ ausgestattet werden sollen, wobei wir zwei Factoren ϱ und ϱ' conjugirt nennen, wenn $\varrho\varrho' = 1$ ist. Hiernach lauten die zu zwei conjugirten Gittern gehörigen Gitterzahlen:

$$\xi = \varrho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y\right),\quad \eta = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y\right)$$

$$\xi' = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{-b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y'\right),\quad \eta' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{-b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y\right).$$

Lassen wir hierin x und y alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir die Minimalcoordinaten der Eckpunkte desjenigen Punktgitters, welchem die Form (a, b, c) angehört; lassen wir ebenso

x' und y' alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir die Minimalcoordinaten der Eckpunkte des conjugirten Gitters, dem die Form $(a, -b, c)$ angehört. Unter den beiden unendlichen Serien von Punkten x, y und x', y' wollen wir je zwei solche Punkte mit einander vergleichen, für welche $x' = x$, $y' = -y$ ist. Ein Blick auf die vorstehenden Formeln zeigt dann, dass für solche Punkte

$$\xi' = \eta \quad \text{und} \quad \eta' = \xi$$

wird. Unsere Verabredung über die Azimuthalfactoren conjugirter Formen bringt es also mit sich, dass, wenn die Form f die Zerlegung

$$f = \xi \cdot \eta$$

liefert, die conjugirte Form f' die Zerlegung

$$f' = \eta\xi$$

giebt. Diese Thatsache hat eine einfache geometrische Bedeutung. Berücksichtigen wir nämlich den Zusammenhang zwischen den Coordinaten ξ, η und u, v, so ergeben sich aus den Gleichungen $\xi' = \eta,\ \eta' = \xi$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$u' \pm (i) v' = u \mp (i) v$$

d. h.

$$u' = u\ ,\ v' = -v.$$

Der Punkt u', v' geht also aus dem Punkte u, v durch Spiegelung an der u-Axe hervor. Überhaupt können wir sagen:

In Folge unserer obigen Verabredung liegen zwei conjugirte Gitter in Bezug auf die u-Axe spiegelbildlich zu einander.

Wir mögen noch hinzufügen, dass sie auch *spiegelbildlich in Bezug auf die v-Axe* liegen. Der Grund hiervon ist der, dass jedes Gitter bei einer Drehung von 180° um 0 mit sich zur Deckung kommt. In Folge dessen giebt

es in unserem ersten Gitter ausser dem Punkte u, v auch stets einen Punkt − u, −v. In diesen wird aber der Punkt u, − v des zweiten Gitters durch eine Spiegelung an der v-Axe übergeführt.

Die Bestimmung der Azimuthalfactoren ist damit natürlich noch nicht abgeschlossen. Vert unseren bisherigen Verabredungen ist es verträglich, dass wir von zwei conjugirten Gittern das eine noch ganz willkürlich orientiren. Erst nachdem dieses geschehen, ist die Lage des zweiten Gitters festgelegt.

Nur in dem besonderen Falle der Anopsgitter ist durch das Vorstehende die Orientirung bereits genauer fixirt, da sie die besondere Eigenschaft haben, mit ihren conjugirten Gittern identisch zu sein. (Theil I pg 163). Nach dem eben Auseinandergesetzten erhält man das richtig orientirte conjugirte Gitter, wenn man das orientirte

ursprüngliche Gitter an der u-Achse (oder v-Achse) spiegelt; ein richtig orientirtes Anceps-gitter muss daher so liegen, dass es durch Spiegelung an der u- (und v-) Achse in sich übergeht.

Wie wir nun früher gesehen haben (vergl. Theil I pg 232 ff) lässt sich das Fundamentalparallelogramm eines Anceps-gitters immer als Rechteck oder Rhombus wählen. Die Orientirung des Anceps-gitter ist deshalb so auszuführen, dass eine Seite des Rechtecks oder eine Diagonale des Rhombus in die Richtung der u- (oder v-) Achse fällt. Dies kann offenbar jedesmal nur auf höchstens 2 Weisen geschehen, da die Seiten des Rechtecks und die Diagonalen des Rhombus rechtwinklig auf einander stehen. Ein Anceps-gitter lässt deshalb nach den vorstehenden Festsetzungen nur noch eine 2-fache Möglichkeit der

Orientirung zu. Wir sprechen dies in folgendem Satze aus:

Unsere Verabredung über die conjugirten Gitter bedeutet für die Anceps-gitter speciell eine noch auf 2 Weisen herzustellende Orientirung derselben.

Wir werfen noch einen Blick auf die Gesammtfigur, soweit sie sich aus unseren bisherigen Betrachtungen ergeben hat. Sie besteht aus einem System von h Gittern, einem Hauptgitter und h-1 Nebengittern. Das Hauptgitter haben wir bereits in eindeutiger Weise festgelegt, die Anceps-gitter in zweideutiger Weise. Die übrigen Gitter sind einander paarweise zugeordnet und liegen spiegelbildlich in Bezug auf die Coordinatenaxen.

Jedes dieser Gitter liefert uns ein System von Gitterzahlen ξ, η. Die arithmetische Natur der Hauptgitterzahlen haben wir bereits oben besprochen:

es sind die ganzen Zahlen des Kör-
pers $\mathfrak{B}$. Die arithmetische Natur der
Nebengitterzahlen hängt offenbar
von der Wahl des Factors ϱ ab.
Wir wollen hierüber vorläufig
nur soviel sagen, dass wir die-
selben als Irrationalitäten fi-
xiren werden, welche zu dem
Körper $\mathfrak{B}$ in einer einfachen Be-
ziehung stehen.

Wir haben schon gelegentlich als Ziel
punkt unserer Entwickelungen hingestellt,
dass unsere h Gitter einen Organismus
bilden und dass sie durch innere
Beziehungen verbunden sind. Dies
wird deutlich werden, wenn wir
im Folgenden dazu übergehen, Rech-
nungsregeln festzusetzen, nach
denen wir mit den Gitterzahlen
ξ, η unserer h Gitter operiren
wollen. Wir kommen hierdurch
zu neuen fruchtbaren Fragestel-
lungen und vertiefen unsere
Auffassung der Gittertheorie.

Von der Composition der Gitter

Es handelt sich zunächst darum festzusetzen, was wir unter der Operation der Addition und Multiplication verstehen wollen. Wir sagen:

Man addirt Gitterpunkte, indem man ihre Minimalcoordinaten addirt.

Man multiplicirt Gitterpunkte, indem man ihre Minimalcoordinaten multiplicirt.

In Zeichen drücken wir dieses folgendermaassen aus. Gegeben seien zwei Gitterpunkte (ξ, η) und (ξ', η'). Nach den vorstehenden Regeln haben wir:

$$(\xi, \eta) + (\xi', \eta') = (\xi + \xi', \eta + \eta')$$
$$(\xi, \eta) \cdot (\xi', \eta') = (\xi\xi', \eta\eta').$$

Im Uebrigen setzen wir fest, dass wir nur solche Operationen vornehmen wollen, durch welche wir wieder auf Punkte unserer ursprünglichen

Figur geführt werden. Wir wollen also durch die vorzunehmenden Operationen keine neuen geometrischen Elemente bez. keine neuen Irrationalitäten einführen.

Was nun die Addition anbetrifft, so ergiebt sich: Sind zwei Punkte (ξ, η) u. (ξ', η') zu addiren, die demselben unserer h Gitter angehören, so liegt offenbar auch der Punkt $(\xi+\xi', \eta+\eta')$ in demselben Gitter, denn er wird durch geometrische Addition der Strecken von O nach (ξ, η) bez. nach (ξ', η') erhalten. Liegen dagegen die Punkte (ξ, η) u. (ξ', η') in verschiedenen Gittern, so wird ihre Summe im allgemeinen nicht in unserer Figur vorkommen (vorausgesetzt natürlich, dass die Azimuthalfactoren irgendwie fixirt sind). Wir werden daher im Folgenden die Addition auch nur auf Punkte desselben Gitters anwenden.

Ebenso wie von der Addition der Gitterpunkte, werden wir auch von der Addition ganzer Gitter reden,

indem wir festsetzen:

Man addirt zwei Gitter, indem man zu jedem Punkte des einen Gitters jeden des anderen addirt.

Auch die Addition der Gitter wird im allgemeinen nicht statthaft sein, wenn wir an unserer Beschränkung festhalten und überdies als Resultat der Addition wieder eine discrete Punktmenge erhalten wollen. Doch kann man z. B. zwei dem Hauptgitter eingelagerte Gitter addiren, was wir in unseren späteren Entwickelungen auch ausführen werden. Wir verweilen deshalb noch einen Augenblick dabei, um zu untersuchen, was über die Discriminante des durch Addition zweier Gitter G_1 und G_2, (die wir etwa dem Hauptgitter eingelagert denken) resultirenden Gitters G_3 auszusagen ist. Sind die Inhalte der Fundamentalparallelogramme von G_1 und G_2 resp. $n\,Vd$ und $n\,Vd$, so können wir den Inhalt des Fundamentalparallelogramms

von G_3 mit r Vd bezeichnen, unter m, n, r ganze rationale Zahlen verstanden. Es muß dann, wie wir behaupten r ein Theiler von m und n sein, weil die Gitter G_1 und G_2 in G_3 enthalten sein müssen. Ist nämlich ein Gitter I in einem Gitter II enthalten und haben die Fundamentalpunkte des ersteren in dem letzteren die Coordinaten $x_0 y_0$, $x_1 y_1$, so ist bekanntlich der Inhalt des Fundamentalparallelogramms von I $|x_0 y_1 - y_0 x_1|$ mal so gross als der von II, also ein ganzzahliges Vielfaches desselben; Damit ist aber unsere Behauptung gerechtfertigt.

Ergiebiger ist für unsere Zwecke die Operation des Multiplicirens. Man darf, wie sich im Folgenden zeigen wird, zwei beliebige Gitterpunkte mit einander multipliciren; die Multiplication führt stets auf Gitterpunkte unserer Figur, vorausgesetzt, daß man die Azimuthalfactoren passend wählt.

Wir haben bereits festgesetzt, was wir unter der Multiplication zweier Gitterpunkte verstehen; wir wollen aber auch hier, ebenso wie bei der Addition, gleich die ganzen Gitter in Betracht ziehen und erklären, was man unter der Multiplication, oder besser gesagt, Composition zweier Gitter versteht.

Zwei Gitter G und G' componiren heisst: alle Punkte von G mit allen Punkten von G' multipliciren und die so entstehenden Punkte auf alle möglichen Weisen addiren.

Die Operation des Componirens ist also nur theilweise eine Multiplication, theilweise dagegen eine Addition, die neue Bezeichnung ist deshalb durchaus gerechtfertigt.

Ebenso wie man nicht zwei beliebige Gitter addiren kann, ist es auch nicht möglich, sie zu componiren, schon aus dem Grunde, weil die Operation des Componirens das Addiren von Gitterzahlen in sich schliesst. Wir wollen deshalb in

Folgendem nur von der Composition unserer h Stammgitter reden, die stets ausführbar ist.

Wir führen zunächst den Nachweis, dass sich durch Composition zweier Stammgitter wieder ein Stammgitter derselben Discriminante ergiebt.

Seien die zu componirenden Gitter

$$G = \sqrt{a}\cdot x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}} \quad \text{und} \quad G' = \sqrt{a'}\cdot x' + \frac{b'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\, y'$$

und die entsprechenden Formen

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{und} \quad f' = a'x'^2 + b'x'y' + cy'^2.$$

Um unsere Behauptung zu rechtfertigen, präpariren wir uns die Gitter resp. Formen erst in geeigneter Weise, indem wir ihnen im Anschluss an Dirichlet einige Lage geben.

Wir nennen nämlich zwei Formen einig, wenn die Coefficienten a und a' theilerfremd sind und die mittleren Coefficienten gleich.

Die letztere Bedingung hat eine einfache geometrische Bedeutung. Ist nämlich $b = b'$, so muss auch

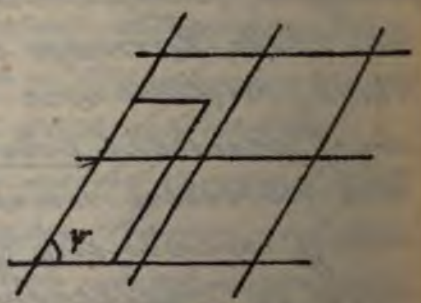
infolge der Gleichheit der Discriminanten $ac - a'c'$ sein. Bezeichnen wir nun die Parallelogrammwinkel, die zu unsern Formen gehören, mit ψ und ψ', so ist

$$\cos\psi + i\sin\psi = \frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{ac}},$$

$$\cos\psi' + i\sin\psi' = \frac{b'+\sqrt{D}}{2\sqrt{a'c'}}, \text{ also}$$

da $\frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{ac}} = \frac{b'+\sqrt{D}}{2\sqrt{a'c'}}$, auch $\cos\psi + i\sin\psi = \cos\psi' + i\sin\psi'$, oder $\psi - \psi'$. Bei einer Lage zweier Formen besitzen also die Fundamentalparallelogramme dieselben Winkel.

Wir zeigen jetzt: wenn zwei Stammformen vorliegen, so können wir sie stets durch zwei aequivalente einige Formen ersetzen.



1. Wir können bewirken, daß a und a' relativ prim werden. (Vergl. Dir.-Ded. pg 234, 4te Auflage)

2. Wir führen an f bez. f' die Transformation erster Ordnung aus

$$x = X + \lambda Y \qquad x' = X' + \mu Y'$$
$$y = Y \qquad y' = Y',$$

wodurch sich ergiebt:

$$f = aX^2 + (2a\lambda + b)XY + (a\lambda^2 + b\lambda + c)Y^2,$$
$$f' = a'X'^2 + (2a'\mu + b')X'Y' + (a'\mu^2 + b'\mu + c')Y'^2.$$

Hier können wir λ und μ so bestimmen, dass

$$2a\lambda + b = 2a'\mu + b' \text{ wird.}$$

Denn die Congruenz

$$2a\lambda \equiv b' - b \pmod{2a'}$$

ist immer lösbar, da a und a' relativ prim sind und $b' - b \equiv 0 \pmod 2$ bei gleichem d.

Nennen wir nun den gemeinsamen Werth der mittleren Coefficienten der beiden Formen B

$$b = b' = B,$$

so folgt aus der Gleichheit der Dis.

criminanten $ac = a'c'$. Da nun a und a' als theilerfremd angenommen werden, so muſs c durch a' und c' durch a theilbar sein. Wir setzen:

$$c = a'\,\mathfrak{C} \qquad c' = a\,\mathfrak{C}$$

Die beiden Formen sind dann

$$(a, \mathfrak{B}, a'\,\mathfrak{C}) \text{ und } (a', \mathfrak{B}, a\,\mathfrak{C})$$

und die entsprechenden Gitter:

$$\mathfrak{G} = \sqrt{a}\,x + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y \text{ und } \mathfrak{G}' = \sqrt{a'}\,x' + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'.$$

Nunmehr können wir folgende Identität aufschreiben:

$$(1) \quad \left(\sqrt{a}\,x + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)\left(\sqrt{a'}\,x' + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'\right) = \sqrt{aa'}\,(xx' - \mathfrak{C}yy') + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,(axy' + a'x'y + \mathfrak{B}$$

$$= \sqrt{aa'}\,X + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,Y.$$

Aus dieser folgt: Wenn wir zwei Gitterzahlen aus den Gittern $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ multipliciren, so erhalten wir eine Gitterzahl, die zu dem Stammgitter

$$(aa', \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \qquad \text{gehört.}$$

Wir haben damit einen Theil unserer
Behauptung bereits bewiesen, aber auch
nur erst einen Theil. Wir haben nämlich
gezeigt, dass durch Composition von
G und G' Zahlen eines Stammgitters

$$G'' = \sqrt{aa'}\, X + \frac{B' + \sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\, Y$$

erhalten werden, aber noch nicht
bewiesen, dass auch alle Zahlen
dieses Stammgitters sich durch die
Composition ergeben. Um dies noch
zu zeigen, brauchen wir offenbar
nur zu beweisen, dass die Basiszahlen
von G''

$$\sqrt{aa'} \text{ und } \frac{B' + \sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}$$

bei der Composition resultiren. Von
der ersten ist dies sofort evident;
die zweite ergiebt sich auf folgende
Weise. Bei der Composition
erhalten wir offenbar die Gitter-
zahlen:

$$\frac{B' + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\sqrt{a'} \text{ und } \frac{B' + \sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\sqrt{a},$$

also auch alle Zahlen, die in der Formel enthalten sind:

$$\frac{B' + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} \sqrt{a'}\, z_1 + \frac{B' + \sqrt{d}}{2\sqrt{a'}} \sqrt{a}\, z_2 \quad \text{oder}$$

$$\frac{B' + \sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}} \left(a' z_1 + a z_2\right),$$

unter z_1 und z_2 ganze rationale Zahlen verstanden. Da nun a' und a theilerfremd sind, ist z_1 und z_2 stets so zu bestimmen, dass $a' z_1 + a z_2 = 1$ wird, d. h.

$$\frac{B' + \sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}$$

wird bei der Composition ebenfalls erhalten.

Nimmt man noch hinzu, was selbstverständlich ist, dass durch die Orientirung von G und G' auch die von G'' bestimmt ist, so können wir jetzt den Satz aussprechen:

Zwei irgendwie orientirte Stammgitter ergeben componirt wieder ein ganz bestimmt orientirtes Stammgitter.

Der vorstehende Satz ist der Fundamentalsatz der ganzen Theorie, auf dem, im Grunde genommen, alles folgende ruht. Bei seinem Beweise sind wir erst auf Umwegen zu der durch Composition resultirenden Form gelangt; es giebt aber auch eine Regel, wie man direct diese Form finden kann. Wir führen dieselbe hier ohne Beweis an, indem wir auf eine Abhandlung von Arndt, Crelle's Journal Bd. 56, 1857 verweisen. Es mögen die früheren Bezeichnungen beibehalten werden, es seien also die zu componirenden Gitter:

$$\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y \quad \text{u.} \quad \sqrt{a'}\,x' + \frac{b'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'$$

Die für das componirte Gitter charakteristischen Zahlen a'' und b'' werden dann auf folgende Weise bestimmt: Es wird

$$a'' = \frac{aa'}{u^2},$$

wo u der grösste gemeinsame

Theiler von

a, a' und $\frac{b+b'}{2}$ ist. Weiter muss b'' den 3 Congruenzen genügen

$$b'' \equiv b \pmod{\frac{2a}{\mu}} \qquad b''\frac{a'}{\mu} \equiv b\frac{a'}{\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$$

$$b'' \equiv b' \pmod{\frac{2a'}{\mu}} \quad \text{oder} \quad b''\frac{a}{\mu} \equiv b'\frac{a}{\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$$

$$\left(\frac{b+b'}{2\mu}\right)b'' \equiv \frac{bb'+d}{2\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}} \qquad b''\frac{b+b'}{2\mu} \equiv \frac{bb'+d}{2\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$$

Bezeichnet man nun mit r, s, t drei ganze rationale Zahlen, die der Bedingung genügen

$$\frac{a}{\mu}'r + \frac{a}{\mu}s + \frac{b+b'}{2\mu}t = 1$$ (solche gibt es stets, da $\frac{a}{\mu}$, $\frac{a'}{\mu}$ und $\frac{b+b'}{2\mu}$ theilerfremd sind), so erhält man, wenn man die 3 Congruenzen resp. mit r, s, t multiplicirt und addirt:

$$b'' \equiv b\frac{a'}{\mu}r + b'\frac{a}{\mu}s + \frac{bb'+d}{\mu}\cdot\frac{b+b'}{2\mu}t \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2} = 2a''}$$

Damit ist aber b'' völlig festgelegt,

denn dasselbe ist offenbar nur mod $2a''$ bestimmt.

Die Compositionstheorie ist von Gauss in den Disquisitiones arithmeticae begründet worden. Gauss spricht natürlich nicht von den Gitterzahlen, sondern von den zugehörigen Formen. Zu der Composition der Formen kommen wir unmittelbar, indem wir in der Gleichung:

$$\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)\left(\sqrt{a'}\,x' + \frac{b'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'\right) = \sqrt{a''}\,x'' + \frac{b''+\sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}\,y''$$

rechts und links die Norm bilden. Die so entstehende Gleichung:

$$(ax^2+bxy+cy^2)(a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2) = a''x''^2+b''x''y''+c''y''^2$$

können wir folgendermassen in Worte fassen:

Die rechts stehende Form zerfällt in das Product der beiden links stehenden, wenn wir für x'', y'' gewisse bilineare ganzzahlige Verbindungen

der x'' y'' und x' y' einsetzen (wie sie aus den Formeln (1) pg. 126 hervorgehen)

Wir können aber diese Darstellung der Theorie unmöglich für zweckmäßig halten. Offenbar dringen wir tiefer in den wahren Sachverhalt ein, wenn wir von den complexen Factoren als wenn wir von ihrem Product, den Formen, sprechen. Denn der einzelne complexe Factor enthält absoluten Betrag + Azimuth, während in dem correspondirenden Werthe der Form nur der absolute Betrag hervortritt.

Die Composition der Formen ist nur ein Corollar, nicht ein Aequivalent für die Composition der Gitterzahlen.

Man wird dies umsomehr zugeben, wenn man bedenkt, daß der Rückschluß von den Formen zu den Gittern nicht ohne weiteres möglich ist. Es kann sehr wohl sein, daß eine Stammform F, wenn man für ihre Variabeln ganzzahlige

bilineare Verbindungen zweier andern Variabelnpaare setzt, in das Product zweier Stammformen F und F' zerfällt, ohne dass darum ein zu F'' gehöriges Gitter sich aus 2 passend orientirten zu F und F' gehörigen 2 Gittern componiren liesse.

Man kann die Frage aufwerfen, warum Gauss dennoch diese Form der Darstellung gewählt hat. Wir können natürlich darüber nichts Bestimmtes aussagen. Immerhin hat, wenn man die späteren Ausführungen von Gauss über die Gittervorstellung im Falle negativer Discriminanten (vergl. seine Anzeige des Buches von Seeber, ges. Werke Bd II) und seine Publicationsweise berücksichtigt, die Auffassung manches für sich, dass Gauss selbst im Besitz der Gitterzahlen sein mochte, dass er aber aus persönlichen Gründen die Composition der Gitterzahlen hinter der Composition der

quadratischen Formen und also die Zerlegung der gewöhnlichen Zahlen in complexe Factoren hinter der Darstellung dieser Zahlen durch die entsprechenden Formen verborgen hat. Übrigens geht die Idee, zerleg. bare Formen (insbes. die binären quadratischen Formen) zu compo. niren, auf Lagrange zurück.

Ehe wir weiter in der Theorie fort. schreiten, wird es zweckmässig sein, noch einige specielle Fälle unseres Fundamentalsatzes zu betrachten.

1. Sind die beiden zu componiren. den Gitter mit dem Hauptgitter i. dentisch, so muss das resultirende Gitter wieder das Hauptgitter sein, denn nach unserem Satze muss das Resultat der Composition wieder ein Stammgitter sein und überdies muss es das Product 1. 1 enthalten, da 1 in den beiden zu compani. renden Gittern vorkommt. Es muss infolgedessen mit dem Hauptgitter identisch sein. Wir

können also den Satz aussprechen:

Componirt man das Hauptgitter mit sich, so resultirt wieder das Hauptgitter.

Dieser Satz lautet in Bezug auf die Gitterzahlen:

Zwei Hauptzahlen mit einander multiplicirt geben wieder eine Hauptzahl.

Es lässt sich in dieser Fassung auch leicht rein rechnerisch nachweisen. Wir betrachten zunächst den Fall $d \equiv 0 \pmod 4$. Die beiden Hauptzahlen seien:

$$\xi = x + y\frac{\sqrt{d}}{2}, \quad \eta = x - y\frac{\sqrt{d}}{2},$$

$$\xi' = x' + y'\frac{\sqrt{d}}{2}, \quad \eta' = x' - y'\frac{\sqrt{d}}{2}.$$

Dann wird

$$\xi\xi' = \left(x + y\frac{\sqrt{d}}{2}\right)\left(x' + y'\frac{\sqrt{d}}{2}\right) = \left(xx' + yy'\frac{d}{4}\right) + (xy' + yx')$$
$$= x'' + y''\frac{\sqrt{d}}{2}$$

$$\eta\eta' = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= x'' - y''\frac{\sqrt{d}}{2}.$$

d. h. das Product ist wieder eine Hauptgitterzahl, da x'', y'' für alle ganzzahligen Werte von x, x', y, y' gemäss der Voraussetzung $d \equiv 0 \pmod 4$ ebenfalls ganze Zahlen sind.

Ähnlich im Falle $d \equiv 1 \pmod 4$. Sind die zu multiplicirenden Gitterzahlen:

$$\xi = x + y\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\,, \quad \eta = x + y\,\frac{1-\sqrt{d}}{2}\,,$$

$$\xi' = x' + y'\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\,, \quad \eta' = x' + y'\,\frac{1-\sqrt{d}}{2}\,,$$

so ergiebt sich durch Multiplication

$$\begin{aligned}\xi\,\xi' &= \left(x + y\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)\left(x' + y'\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right) = \\ &= \left[xx' + yy'\cdot\frac{d-1}{4}\right] + (xy' + x'y + yy')\cdot\frac{1+\sqrt{d}}{2} \\ &= x'' + y''\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\,,\end{aligned}$$

womit unsere Behauptung auch in diesem Falle gerechtfertigt ist.

Wir bemerken noch, dass unsere Behauptung vom Standpunkte der Körpertheorie ganz selbstverständlich ist. Wir haben nämlich nur gezeigt, dass das Product zweier ganzer Zah-

len des Körpers Vd wieder eine ganze Zahl desselben Körpers ist.

2. Ist von den beiden zu componirenden Gittern das eine das Hauptgitter H, das andere ein Nebengitter G, in beliebiger Orientirung, so ergiebt sich durch Composition bei der wieder das Nebengitter G in derselben Orientirung. Denn das resultirende Gitter muss offenbar, da das Hauptgitter die 1 enthält, das Gitter G enthalten und infolgedessen mit ihm identisch sein, da beide dieselbe Discriminante haben.

Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Componirt man ein beliebiges Nebengitter mit dem Hauptgitter, so resultirt dasselbe Nebengitter, u. zw. gleichviel, wie wir uns den Azimuthalfactor ς bestimmt denken.

Für die Gitterpunkte lautet der entsprechende Satz:

Multiplicirt man einen Punkt

eines Nebengitters mit einem Punkte des Hauptgitters, so erhält man einen Punkt desselben Nebengitters.

Um die Richtigkeit dieses Satzes rechnerisch nachzuweisen, betrachten wir zunächst wieder den Fall $d \equiv 0 \pmod 4$. Wir haben dann:

$$\xi = x + y\frac{\sqrt{d}}{2}, \quad \eta = x - y\frac{\sqrt{d}}{2}$$

$$\xi' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right), \quad \eta = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right)$$

Das Product $\xi\xi'$ lässt sich nun schreiben:

$$\xi\xi' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x'' + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y''\right),$$

wenn man

$$x'' = xx' - \frac{b}{2}yx' - cyy', \quad y'' = xy' + ayx' + \frac{b}{2}yy'$$

setzt, d. h. der Punkt $(\xi\xi', \eta\eta')$ gehört wieder demselben Nebengitter wie (ξ', η') an, denn x'' und y'' sind für alle ganzzahligen Werthe von x, x', y, y' selbst ganze Zahlen, da

im Falle $d \equiv 0 \pmod 4$ auch die Congruenz $b \equiv 0 \pmod 2$ besteht.

Bei $d \equiv 1 \pmod 4$, wobei gleichzeitig $b \equiv 1 \pmod 2$ ist, erhält man in analoger Weise:

$$\xi\xi' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x'' + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y''\right), \text{ wo}$$

$$x'' = xx' + \frac{1-b}{2}yx' - cyy' \qquad y'' = xy' + ayx + \frac{1+b}{2}yy'$$

ist.

Ein specieller Fall unseres letzten Satzes ist uns von früher her wohl bekannt, wir meinen die <u>Aufsuchung der Automorphien eines Gitters mit Hülfe der Pell'schen Gleichung</u>. Wir bemerkten bereits, daß die Pell'sche Gleichung darauf hinauskommt, die jedesmalige Hauptform $= 1$ zu setzen, also $x^2 - \frac{d}{4}y^2 = 1$, bez. $x^2 + xy + \frac{1-d}{4}y^2 = 1$. Aus diesen x, y stellten wir uns die Grössen:

$$\xi, \eta = x \pm y\,\frac{\sqrt{d}}{2}, \text{ resp. } \xi, \eta = x + y\,\frac{1 \pm \sqrt{d}}{2}$$

her.

Wir nannten dieselben Einheiten, weil ihre Norm gleich 1 ist. Wir können dieselben nach unserer jetzigen Terminologie als Coordinaten der Einheitspunkte des Hauptgitters bezeichnen, nämlich derjenigen Gitterpunkte, welche den „Abstand" 1 von O besitzen.

Mit den Einheiten ξ, η multiplicirten wir früher die Gitterzahlen ξ', η' eines beliebigen zur Discriminante d gehörigen Gitters. Es zeigte sich, dass dabei ein dem ursprünglichen congruentes Gitter entstand, dass wir also eine Automorphie des Gitters erhielten. Dieser Umstand erklärt sich jetzt einfach aus dem eben bewiesenen Satze.

Zunächst ist nach unserem Satze klar, das der Punkt $(\xi, \eta) \cdot (\xi', \eta')$ wieder dem Gitter (ξ', η') angehören muss. Während aber im allgemeinen durch Multiplication eines Punktes (ξ, η) des Hauptgitters mit den sämmtlichen

Punkten (ξ', η') ein dem Gitter $\xi'\eta'$ eingelagertes Gitter entsteht, dessen einzelne Maschen sich aus mehreren Maschen des ursprünglichen Gitters zusammensetzen, bringt es die Wahl des Punktes (ξ, η) in unserem Falle mit sich, dass wir ein dem ursprünglichen congruentes Gitter erhalten. In der That wird wegen $N(\xi) = 1$ auch $N(\xi\xi') = N(\xi')$. Der Abstand der Gitterpunkte von O wird also durch die Multiplication des Gitters mit dem Punkte (ξ, η) nicht geändert. Das neue Gitter wird daher dem alten congruent sein, so dass sich in der That eine Automorphie ergiebt. Ist (ξ, η) kein Einheitspunkt, so wird das neue Gitter mit dem alten nur ähnlich sein.

Wir betrachten endlich den Fall conjugirter Stammgitter, bezüglich derer wir den Satz aussprechen:

Zahlen aus conjugirten Gittern geben multiplicirt Hauptzahlen.

(vorausgesetzt, dass wir an der früher verabredeten Orientirung conjugirter Gitter festhalten)

Sind die Gitterzahlen aus den richtig orientirten conjugirten Gittern:

$$\xi = \varepsilon\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right),\quad \eta = \frac{1}{\varepsilon}(\dots),$$

$$\xi' = \frac{1}{\varepsilon}\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{-b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right),\quad \eta' = \varepsilon(\dots),$$

so ergiebt sich

$$\xi\xi' = \left(a\,xx' - \frac{b}{2}\,xy' + \frac{b}{2}\,yx' - cyy'\right) + \frac{\sqrt{d}}{2}(xy' + y$$

$$= \left[a\,xx' - \frac{b-1}{2}\,xy' + \frac{b-1}{2}\,yx' - cyy'\right] + \frac{1+\sqrt{d}}{2}(xy$$

Aus dieser Doppelgleichung folgt die Richtigkeit unseres Satzes sowohl für $d \equiv 0 \pmod 4$ (erste Zeile) wie auch $d \equiv 1 \pmod 4$ (zweite Zeile), da die Klammergrössen stets ganze Zahlen sind.

Für die Composition conjugirter Stammgitter folgen wir noch leicht den Satz:

<u>Conjugirte Stammgitter geben componirt das Hauptstammgitter.</u>

Denn das resultirende Gitter muss

ein Stammgitter sein und enthält überdies nach dem eben Bewiesenen Hauptzahlen, es muss also das Hauptstammgitter sein.

19. VI. 96. Die von uns begründete Composition der Gitter fassen wir in die symbolische Gleichung zusammen:

$$G.G'=G''.$$

Dieselbe zeigt, dass unsere h Gitter

$$G, G', G'', \ldots G^{(h-1)}$$

ein geschlossenes Ganzes bilden und dass wir bei der Composition immer wieder zu einem unserer h Elemente kommen. Die vorstehende Gleichung ist auch umkehrbar in dem Sinne dass wir zu G' und G'' in eindeutiger Weise ein zugehöriges G finden können. Dabei berücksichtigen wir, dass bei der Composition das Hauptgitter G_0 die Rolle der Einheit spielt und dass zwei conjugirte Gitter G und G dementsprechend als inverse Elemente angesehen

werden müssen. Wir können nämlich den Satz von pg. in die symbolische Gleichung fassen

$$GG_0 = G \text{ oder } G_0 = 1.$$

und den Satz von pg. in die folgende Gleichung:

$$G\bar{G} = G_0 = 1.$$

In Folge dessen erhalten wir aus der Compositionsgleichung $GG' = G''$, in dem wir rechts und links mit $\bar{G}'$ componiren:

$$G''\bar{G}' = GG'.\bar{G}' = GG_0 = G.$$

Das Gitter G ist also in der That eindeutig durch G' und G'' bestimmt. Endlich berücksichtigen wir, dass die Operation der Multiplication eine commutative Operation ist, so dass

$$GG' = G'G$$

wird. Alle diese Thatsachen fassen wir in die einfache Aussage zusammen:

Unsere h Gitter bilden eine

Gruppe vertauschbarer Elemente.

Die Eigenschaften dieser Gruppe sind u. a. studirt worden von

Schering: Die Fundamentaldassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen, Göttinger Abhandlungen Bd. 14.

und von

Frobenius und Stickelberger: Ueber Gruppen vertauschbarer Elemente, Crelle Bd 86, 1878.

Nebenbei bemerken Sie an dem Titel dieser Abhandlungen die Fortschritte, welche der Gruppenbegriff in den letzten Decennien gemacht hat. Während in der früheren Arbeit die specielle Beschaffenheit der Elemente, aus denen die Gruppe besteht, betont wird, abstrahirt die zweite Arbeit hiervon gänzlich und hebt nur ihre Gruppeneigenschaft hervor, wie solches der Allgemeinheit des Gruppenbegriffes in der That besser entspricht.

Wir führen hier eine Reihe einfacher

Sätze an, zu denen die genannten Autoren gelangen; die übrigens ganz einfachen Beweise sollen der Kürze halber fortgelassen werden.

1. Wir greifen irgend eines der h Gitter heraus und componiren dasselbe mit sich selbst. Dabei muss wegen der Endlichkeit der Gruppenelemente einmal, sagen wir nach k-maliger Composition, die Einheit auftreten. Wir bilden also:

$$G, G^2, G^3, \ldots G^k = 1.$$

Unser erster Satz lautet nun, dass der „Grad" k nothwendig ein Theiler von h sein muss.

2. Es könnte sein, dass zufälliger Weise $k = h$ wird. Ein solches Gitter nennen wir ein „erzeugendes Gitter" und bezeichnen dasselbe mit Γ. Wir können dann die ganze Reihe der Gitter in der Form

$$\Gamma, \Gamma^2, \Gamma^3, \ldots \Gamma^h = 1$$

anschreiben.

3. Wenn $k \neq h$ ist, so wird es jedenfalls ein Gitter geben, für welches k einen maximalen Werth hat. Wir schreiben dann zunächst die folgenden k Gitter auf:

$$T, T^2, \ldots T^k = 1.$$

Darauf suchen wir unter den übrigen Gittern dasjenige (T_1) auf, dem der grösste hier noch vorkommende Grad (k_1) zukommt. Wir können dann k_1 Gittern die Form geben:

$$T_1, T_1^2, \ldots T_1^{k_1} = 1.$$

Durch Combination dieser k_1 mit den früheren k Gittern ergeben sich k, k_1 Gitter

$$T^\alpha T_1^{\alpha_1}, \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0, 1, \ldots k-1 \ (\mathrm{mod}.\, k) \\ \alpha = 0, 1, \ldots k_1 - 1 \ (\mathrm{mod}\, k_1) \end{array}\right\}.$$

4. Fahren wir so fort, so erhalten wir eine abbrechende Reihe von Gittern

$$T, T_1, T_2 \ldots$$

bez. vom Grade

$$k, k_1, k_2.$$

Sämmtliche h Gitter stellen sich dann in der Gestalt dar:

$$T^{\alpha} T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \ldots \left\{ \begin{array}{l} \alpha \equiv 0, 1, \ldots k-1 \pmod{k} \\ \alpha_1 \equiv 0, 1, \ldots k_1 - 1 \pmod{k_1} \\ \alpha_2 \equiv 0, 1, \ldots k_2 - 1 \pmod{k_2} \end{array} \right\}$$

Dabei zeigt sich, dass die Zahlen k nicht nur der Ungleichung genügen:

$$h \geqq k \geqq k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots$$

sondern es ist auch in dieser Reihe jede Zahl ein Theiler der vorhergehenden.

5. Sind uns zwei Gitter in der Darstellung gegeben

$$T^{\alpha} T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \ldots$$

$$T^{\beta} T_1^{\beta_1} T_2^{\beta_2} \ldots,$$

so wird (wegen der Vertauschbarkeit der Elemente) das durch Composition entstehende Gitter ersichtlich dieses sein:

$$T^{\alpha+\beta}\, T_1^{\alpha_1+\beta_1}\, T_2^{\alpha_2+\beta_2} \ldots$$

Hier wird man die Exponenten $\alpha+\beta, \alpha_1+\beta_1, \ldots$ natürlich immer mod k, bez. mod $k_1 \ldots$ auf ihre kleinsten Reste reducieren.

Die Composition der Gitter verwandelt sich in eine Addition der Exponenten α und β.

6. Sollen die beiden vorhergenannten Gitter insbesondere conjugirt sein, so muss bei der Composition die Einheit entstehen. Es muss also allgemein sein:

$$\alpha_i \equiv -\beta_i \pmod{k_i}$$

7. Dementsprechend lassen sich die Anceps-gitter leicht charakterisiren als solche Gitter, deren Quadrat die Einheit ist. Soll also

$$T^{\alpha}\, T_1^{\alpha_1}\, T_2^{\alpha_2} \ldots$$

speciell ein Anceps-gitter vorstellen, so müssen die Congruenzen erfüllt sein:

rade sind. Ist k_i
hat die Congruen

$$2\alpha_i \equiv 0 \ (m$$

nur die eine Lösu
dber k_i gerade, s
mod k_i incongru
nämlich

$$\alpha_i = 0 \text{ un}$$

Hiernach beträgt
cepsgitter, wenn τ
in der Reihe $k, k,$
menden geraden
fach 2^τ.

Wir erläutern d

usammenstellen. Wir wählen dabei Git.
r von negativer Discriminante aus,
eil uns diese wegen der Anwendung
uf die Theorie der elliptischen Func.
ionen besonders wichtig sind. Es
ei zunächst

1. $d = -356 = -4.89.$

Die Classenanzahl h ergiebt sich aus
er Anzahl der reducirten Formen
nd diese aus der Anzahl der
ahlentripel a, b, c, für welche

$$|b| \leqq a \leqq c, \quad -356 = b^2 - 4ac.$$

ban findet die folgenden reducir.
en Formen:

a	b	c
1	0	89
2	2	45
3	± 2	30
5	± 2	18
6	± 2	15
7	± 6	14
9	± 2	10

Die beiden ersten Formen charakteri=

siren sich als Ancepsformen, speciell die erste als Hauptform. Die übrigen sind paarweise als conjugirte Formen zusammengeordnet. Die Zahl der reducirten Formen und daher die Classenanzahl beträgt 12.

Bei der Composition wollen wir mit der Form

$$T = (3, \pm 2, 30)$$

beginnen und die successiven Potenzen derselben bilden. Nach unserer obigen Regel für die Composition der zu den Formen (a, b, c) und (a', b', c') gehörigen Gitterzahlen, haben wir den grössten gemeinsamen Theiler μ der Zahlen

$$a = 3 \quad , \quad a' = 3 \quad , \quad \frac{b + b'}{2} = 2$$

zu suchen, welcher gleich 1 ist. Es wird also

$$\alpha = 3, \quad \alpha' = 3 \quad , \quad \beta = 2 .$$

Daraus folgt $a'' = 9$. Zur Berechnung von b'' haben wir die Congruenzen

$b'' \equiv 2 \pmod 6$
$b'' \equiv 2 \pmod 6$
$4b'' \equiv 4(1-89) \pmod{36}$ oder
$b'' \equiv -88 \pmod 9$ oder endlich
$b'' \equiv +2 \pmod 9$.

Die gemeinsame Lösung dieser drei Congruenzen ist offenbar

$b'' = 2$ oder allgemeiner $b'' = 2+18m$.

Die dem Gitter T^2 entsprechende Form wird also

$(9, 2, 10)$,

welche sich zufälliger Weise unter unsern reducirten Formen vorfindet.

Wir gehen darauf zu T^3 und bilden zu dem Zwecke:

$(9, 2, 10)\ (3, 2, 30)$.

Jetzt haben wir

$$a = 9,\ a' = 3,\ \frac{b+b'}{2} = 2,$$

also $\mu = 1$ und

$$\alpha = 9,\ \alpha' = 3,\ \beta = 2,\ a'' = 27.$$

Die Congruenzen zur Bestimmung von b'' sind

$b' \equiv 2 \pmod 6$
$b'' \equiv 2 \pmod{18}$
$b'' \equiv 20 \pmod{27}$,
woraus wir schliessen
$b'' = 20$ bez. $b'' = 20 + m.54$.
Die dem Gitter T^3 entsprechende Form wird also

$$(27, 20, 7) = 27x'^2 + 20x'y' + 7y'^2$$

Diese Form ist noch nicht reducirt. Sie wird es aber mittelst der unimodularen Substitution

$$x' = -y'$$
$$y = x' + y'.$$

Wir haben nämlich
$27x'^2 + 20x'y' + 7y'^2 = 7x'^2 + (-20+14)x'y'$
$+(27-20+7)y'^2 = (7, -6, 14)$.
Fahren wir in dieser Weise fort, so erkennen wir, dass wir successive unsere 12 Formen aus unserem Ausgangsgitter T ableiten können. Es liegt hier also der pag 146 sub 2 hervorgehobene besondere Fall vor. Die Reihenfolge,

in der unsere 12 reducirten Formen erhalten werden, ist diese

$T^0 = (1, 0, 89)$ $\qquad$ $T^6 = (2, 2, 45)$

$T^1 = (3, 2, 30)$ $\qquad$ $T^7 = (6, 2, 15)$

$T^2 = (9, 2, 10)$ $\qquad$ $T^8 = (5, -2, 18)$

$T^3 = (7, -6, 14)$ $\qquad$ $T^9 = (7, 6, 14)$

$T^4 = (5, 2, 18)$ $\qquad$ $T^{10} = (9, -2, 10)$

$T^5 = (6, -2, 15)$ $\qquad$ $T^{11} = (3, -2, 30)$

Übrigens bewähren sich noch die sub γ und δ angegebenen Regeln über die conjugirten- und die Anceps-gitter. In der vorstehenden Reihe sind je zwei solche Gitter T^α und T^β conjugirt, für welche $\alpha + \beta = h = 12$, während die Gitter T^0 und T^6 Anceps-Gitter sind, da ihre Exponenten der Congruenz $2a \equiv 0 \pmod{12}$ genügen. Die Zahl der Ancepsgitter beträgt, wie es sein muß, $2^\tau = 2$, indem die in unserem Fall allein vorhandene Zahl $k = 12$ eine gerade Zahl ist.

Als zweites Beispiel wählen wir

2.) $d = -972 = -4 \cdot 243$.

Die Classenanzahl ist hier $h = 9$. Die vorhandenen neun reducirten Formen schreiben wir sogleich nach ihrer Erzeugungsweise in die Tabelle zusammen.

$T^0 = (1, 9, 243)$; $T^0 T_1' = (4, 2, 61)$; $T^0 T_1^2 = (4, -2, 61)$;
$T^1 = (7, 6, 36)$; $T^1 T_1' = (13, -4, 19)$; $T^1 T_1^2 = (9, -6, 28)$;
$T^2 = (7, -6, 36)$; $T^2 T_1' = (9, 6, 28)$; $T^2 T_1^2 = (13, 4, 19)$.

Hier haben wir zwei erzeugende Gitter T und T_1 mit den Exponenten $k = 3$ und $k_1 = 3$. Wiederum sind diejenigen Gitter paarweise conjugirt, für welche

$$\alpha + \beta \equiv 0 \pmod 3 \text{ und gleichzeitig}$$
$$\alpha_1 + \beta_1 \equiv 0 \pmod 3$$

ist. Da die Anzahl τ der in der Reihe $k = 3$, $k_1 = 3$ vorkommenden geraden Zahlen 0 beträgt, so wird die Anzahl der Anceps-gitter $2^0 = 1$. In der That giebt es hier keine andere An-

cepsform als die Hauptform.
25. VI. 96. Wir benutzen jetzt die Gleichung

$$G = T^{\alpha} T'^{\alpha'} \ldots$$

um die Orientirung unserer h Gitter G definitiv festzulegen. Bisher haben wir nur die Lage des Hauptgitters und die gegenseitige Lage zweier conjugirter Gitter bestimmt. Das Entsprechende soll jetzt allgemein für jedes Gitter geschehen. U. zw. wollen wir es so einrichten, dafs der folgende Satz Gültigkeit bekommt:

Zwei Punkte aus orientirten Gittern geben multiplicirt wieder einen Gitterpunkt in richtiger Orientirung.

Wir beginnen mit dem erzeugenden Gitter T. Wenn wir dieses k-mal mit sich selbst componiren, so ergiebt sich, wie wir sahen, das Hauptgitter. Dem soeben genannten Princip entsprechend müssen wir also T so orientiren, dafs

T^k das Hauptgitter in der früher verabredeten Orientirung ergiebt. Ebenso verfahren wir mit $T_1, T_2, \ldots$ Alle übrigen Gitter aber orientiren wir in der Weise, wie sie aus $T, T_1, \ldots$ nach unserer obigen Compositionsformel entstehen. — Dann ist unsere Absicht vollkommen erreicht. In der That entsteht durch Multiplication aus zwei Punkten der Gitter $T^\alpha T_1^{\alpha_1} \ldots$ bez. $T^\beta T_1^{\beta_1} \ldots$ ein Punkt aus dem Gitter $T^{\alpha+\beta} T_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots$, letzteres in derjenigen Lage genommen, die wir diesem Gitter ohnehin zugewiesen haben.

Wir mögen noch bemerken, daß unsere frühere Verabredung über die conjugirte Lage conjugirter Gitter in unserer jetzigen Orientirungsregel enthalten ist. Da nämlich zwei conjugirte Gitter die Form haben $T^\alpha T_1^{\alpha_1} \ldots$ bez. $T^{-\alpha} T_1^{-\alpha_1} \ldots$, so setzen sich ihre Azimuthalfactoren aus lauter reciproken Bestand-

theilen zusammen. Sie liegen also nach unserer jetzigen Regel von selbst symmetrisch gegen die u- und v-Axe.

Die so erhaltene Figur, in der unsere h Gitter in bestimmter Weise gelagert sind, nennen wir die Normalfigur; sie liegt allen späteren Betrachtungen, in's Besondere der Theorie der singulären elliptischen Gebilde zu Grunde.

Auf die Herstellung der Normalfigur im Einzelnen müssen wir noch näher eingehen. Wir müssen nämlich angeben, wie wir es erreichen, dass $T^k, T'^k, \ldots$ gerade mit dem Hauptgitter zusammenfällt. Wir wollen dabei der Deutlichkeit wegen den Fall eines positiven und negativen d getrennt behandeln und mit den negativen Werthen von d beginnen.

1. $d < 0$. Wir nehmen die Fälle $d = -3$ und $d = -4$ vorweg. Die Gitterzahlen ξ, η des Hauptgitters

T^k das Hauptgitter in der früher verabredeten Orientirung ergiebt. Ebenso verfahren wir mit $T_1, T_2, \ldots$ Alle übrigen Gitter aber orientiren wir in der Weise, wie sie aus $T, T_1, \ldots$ nach unserer obigen Compositionsformel entstehen. — Dann ist unsere Absicht vollkommen erreicht. In der That entsteht durch Multiplication aus zwei Punkten der Gitter $T^\alpha T_1^{\alpha_1} \ldots$ bez. $T^\beta T_1^{\beta_1} \ldots$ ein Punkt aus dem Gitter $T^{\alpha+\beta} T_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots$, letzteres in derjenigen Lage genommen, die wir diesem Gitter ohnehin zugewiesen haben.

Wir mögen noch bemerken, dass unsere frühere Verabredung über die conjugirte Lage conjugirter Gitter in unserer jetzigen Orientirungsregel enthalten ist. Da nämlich zwei conjugirte Gitter die Form haben $T^\alpha T_1^{\alpha_1} \ldots$ bez. $T^{-\alpha} T_1^{-\alpha_1} \ldots$, so setzen sich ihre Azimuthalfactoren aus lauter reciproken Bestand-

theilen zusammen. Sie liegen also nach unserer jetzigen Regel von selbst symmetrisch gegen die u- und v-Axe.

Die so erhaltene Figur, in der unsere h Gitter in bestimmter Weise gelagert sind, nennen wir die Normalfigur; sie liegt allen späteren Betrachtungen, in's Besondere der Theorie der singulären elliptischen Gebilde zu Grunde.

Auf die Herstellung der Normalfigur im Einzelnen müssen wir noch näher eingehen. Wir müssen nämlich angeben, wie wir es erreichen, daß T^k, T'^k, ... gerade mit dem Hauptgitter zusammenfällt. Wir wollen dabei der Deutlichkeit wegen den Fall eines positiven und negativen d getrennt behandeln und mit den negativen Werthen von d beginnen.

1. $d < 0$. Wir nehmen die Fälle $d = -3$ und $d = -4$ vorweg. Die Gitterzahlen ξ, η des Hauptgitters

haben die Form

$$d = -3 : x \pm \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} y.$$

$$d = -4 : x \pm i y.$$

Es sind dieses die allereinfachsten Beispiele von ganzen algebraischen Zahlen eines quadratischen Zahlkörpers. Die Bedingungsgleichungen der reducirten Formen zeigen nun sofort, dass in diesen Fällen die Classenanzahl $h = 1$ wird. Es sind also keine Nebengitter vorhanden; die ganze Normalfigur reducirt sich auf die Figur des Hauptgitters. Umgekehrt also dürfen wir unsere Normalfigur für $|d| > 4$ als die naturgemässe Verallgemeinerung der einfachen Gitterfiguren im Falle $d = -3$ und $d = -4$ ansehen.

Wir überlegen nun, wie im Falle $|d| > 4$ die Orientirung der Nebengitter im Einzelnen vorzunehmen ist. Es handelt sich dabei um die Bestimmung der

(reellen) Grösse ϱ in dem Ausdrucke für eine allgemeine Gitterzahl von T:

$$e^{i\varrho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)},$$

oder auch in dem specielleren Ausdrucke

$$e^{i\varrho\sqrt{a}},$$

welcher eine Basiszahl des Gitters T bedeutet.

Componiren wir das Gitter T k-mal mit sich selbst, so entsteht aus dem letzgenannten Punkte:

$$e^{ki\varrho\sqrt{a}\,k}.$$

Der zugehörige Gitterpunkt gehört aber dem Hauptgitter an und findet sich in diesem etwa unter dem Azimuthe Φ vor. Dabei haben wir die Automorphien des Gitters T einerseits, des Hauptgitters andrerseits zu beachten. Wenn, wie wir voraussetzen, $d < -4$ ist, so besteht die ein-

zige vorhandene Automorphie in einer Drehung des Gitters durch den Winkel π. Es findet sich daher der fragliche Punkt $e^{ki\varphi} V a^k$ in dem Hauptgitter ausser unter dem Azimuthe Φ nur noch unter dem Azimuthe $\Phi + \mu\pi$ vor, wo μ irgend eine ganze Zahl bedeutet. Soll also $e^{ki\varphi} V a^k$ direct in einen correspondierenden Punkt des Hauptgitters übergehen, so muss

$$k\varphi = \Phi + \mu\pi$$

oder

$$\varphi = \frac{\Phi + \mu\pi}{k}$$

gewählt werden. Andrerseits können wir uns darauf beschränken, μ die zu k incongruenten Werthe $\mu = 0, 1, 2, \ldots k-1$ durchlaufen zu lassen, um alle möglichen mit unserer obigen Festsetzung verträglichen Orientirungen von T zu erhalten. Denn auch das

Gitter T' besitzt doch die vorher genannte Automorphie, so daß zwei Orientirungen, welche sich nur um ein Vielfaches von π unterscheiden, als identisch gelten müssen. In Folge dessen bekommen wir gerade k zulässige Orientirungen des Gitters T. Von diesen greifen wir irgend eine heraus und legen sie unserer Normalfigur zu Grunde.

Dasselbe machen wir mit dem erzeugenden Gitter T_1. Dieses geht durch k_1-malige Composition in das Hauptgitter über. Demnach müssen wir das Azimuth ε_1 dieses Gitters so wählen, daß

$$k_1 \varepsilon_1 = \varphi_1 + \mu_1 \pi$$

oder

$$\varepsilon_1 = \frac{\varphi_1 + \mu_1 \pi}{k_1}$$

wird. Für T_1 ergeben sich also k_1 zulässige Lagen. Ebenso für T_2 k_2 Lagen etc.

Im Ganzen ergeben sich so

$k\ k_1\ k_2 \ldots = h$ verschiedene Möglichkeiten, unsere Normalfigur zu entwerfen. Indem wir bei der Orientierung der Gitter $T, T_1, \ldots$ den ganzen Zahlen α willkürliche, aber bestimmte Werthe beilegen, greifen wir unter den h Möglichkeiten eine bestimmte, aber beliebige heraus und halten an dieser für die Folge fest.

Die nunmehr definirten Nebengitterzahlen mögen wir noch arithmetisch characterisiren. Sie gehören nicht direkt dem Körper Ω an, wohl aber je einem Nebenkörper desselben, welcher dadurch entsteht, daß wir zu Ω bez. die Irrationalitäten

$$\sqrt{a}\, e^{i\frac{\varphi+\mu\pi}{k}},\ \sqrt{a_1} e^{i\frac{\varphi_1+\mu\pi}{k_1}}, \ldots$$

adjungiren. In der That lassen sich alle Gitterzahlen von T rational durch Ω und $\sqrt{a}\, e^{i\frac{\varphi+\mu\pi}{k}}$, alle Gitterzahlen von T_1 durch Ω und $\sqrt{a_1} e^{i\frac{\varphi_1+\mu\pi}{k}}$ oder auf-

bauen.

Überdies sind alle Nebengitterzahlen algebraische ganze Zahlen. Beispielsweise liefert jeder Punkt von T' in die k^{te} Potenz erhoben, einen Punkt des Hauptgitters. Da nun die Zahlen des Hauptgitters einer quadratischen Gleichung genügen, deren erster Coefficient 1 ist, so befriedigen die Zahlen von T' eine Gleichung $2k^{ten}$ Grades deren erster Coefficient gleichfalls die Einheit ist.

Wir fügen noch einen Hülfssatz hinzu, der uns später nützlich sein wird. Wir behaupten:

Ein Ausdruck von der Form der Nebengitterzahlen, in welchem $x = x_0$ und $y = y_0$ als rational vorausgesetzt werden, kann nur dann eine ganze algebraische Zahl sein, wenn x_0 und y_0 ganze Zahlen sind.

Zum Beweise denken wir uns den fraglichen Ausdruck

1) $S\left(\sqrt{a}\, x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\, y_0\right)$

mit den Zahlen des zu dem Gitter (a, b, c) conjugirten Gitters multiplicirt, d. h. mit

$$2) \quad \frac{1}{s}\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{-b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right),$$

wo x' und y' beliebige ganze rationale Zahlen bedeuten sollen. Bei der Multiplication ergiebt sich ein Ausdruck von der Form der Hauptzahlen, nämlich, je nachdem $d \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 4$ ist:

$$3) \quad X + Y\frac{\sqrt{d}}{2} \quad \text{bez} \quad X + Y\frac{1+\sqrt{d}}{2};$$

hierbei wird nach pg. 142.

$$4) \quad Y = x'y_0 + y'x_0 .$$

Nun setzen wir voraus, dass 1) eine ganze algebraische Zahl ist. Durch Multiplication mit dem Ausdrucke 2), welcher eo ipso eine ganze algebraische Zahl darstellt, entsteht wieder eine ganze algebraische Zahl. Die Ausdrücke 3) sind daher ganze Zahlen des Körpers $\sqrt{d}$. Infolgedessen müssen x' und

y ganze rationale Zahlen sein u. zw. für alle ganzzahligen Werthe von x und y. Daraufhin zeigt aber die Gleichung 4), daß auch x_0 und y_0 ganze Zahlen sein müssen. Setzen wir nämlich etwa $x = 1, y = 0$ oder $x = 0, y = 1$, so sehen wir, daß y_0 bez. x_0 einen ganzzahligen Werth besitzen.

2. $d > 0$. Bei positiver Discriminante liegen die Dinge ganz ähnlich, nur drücken sie sich hier etwas anders aus. Der Unterschied liegt darin, daß die Azimuthalfactoren ϱ hier reelle Zahlen vorstellen und daß jetzt stets nicht-triviale Automorphien vorhanden sind. Letztere ergeben sich wie wir wissen aus der kleinsten Lösung (t_0, u_0) der Pell'schen Gleichung in der Form

$$\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{\alpha}$$

Da die Automorphien nur von der Größe d abhängen, so sind

sie dem Hauptgitter und den Nebengittern gemeinsam. Geometrisch konnten wir sie als Pseudodrehungen um beliebige Multipla des Pell'schen Winkels

$$i \log \frac{(t_0 + u_0 \sqrt{d})}{2}$$

auffassen, welche unsere Gitter mit sich zur Deckung bringen. Der Haupt-Bestimmung liegt dabei, vermöge unserer obigen geometrischen Verabredungen, das Linienpaar $u^2 - v^2 = 0$ zu Grunde.

Bei der Frage nach der richtigen Orientirung von T handelt es sich nun um die Bestimmung der reellen und, wie wir hinzufügen können, auch positiven Grösse ρ in dem allgemeinen Ausdrucke der Gitterzahlen von T:

$$\rho\left(\sqrt{a}\, x + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\, y\right).$$

(Ein Vorzeichenwechsel von ρ würde die Lage des Gitters nicht ändern, sondern nur bedeuten, dass wir in einem anderen

Sector der Linien $u \pm v = 0$ operiren.)

Im Besonderen genügt es, den Basispunkt $x = 1, y = 0$, d. h. den Punkt

$$\wp \sqrt{a}$$

richtig zu legen, woraus dann die richtige Orientirung des ganzen Gitters von selbst folgt.

Durch k-malige Composition von T ergiebt sich das Hauptgitter. Möge nun ein Punkt des Hauptgitters, welcher hierbei dem durch Potenzirung aus $\wp \sqrt{a}$ entstehenden Punkte $\left(\wp^k \sqrt{a^k}\right)$ entspricht, unter dem Pseudo-Azimuthe P orientirt sein (wo wir P wieder als positive Zahl voraussetzen). Es giebt dann noch unendlich viele andere Punkte des Hauptgitters, welche demselben Punkte entsprechen und deren Pseudo-Azimuth durch die Formel

$$P\left(\frac{t_0 + u_0 \sqrt{d}}{2}\right)^u$$

bestimmt sind. Die Einheit $\frac{t_0 + u_0 \sqrt{d}}{2}$ setzen wir hier gleichfalls als posi-

tive Grösse voraus. Soll nun bei der Composition das Gitter T direct in das Hauptgitter übergehen, so müssen wir haben

$$\varrho^k = P\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{\mu}$$

oder

$$\varrho = P^{\frac{1}{k}}\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{\mu/k}.$$

Hier durchläuft μ alle ganzen Zahlen. Es genügt aber wieder, nur k modulo k incongruente Werthe von μ zu berücksichtigen etwa die Werthe $\mu = 0, 1, \ldots k-1$; in der That geben zwei modulo k congruente Werthe von μ zu zwei Werthen von ϱ Anlass, welche sich lediglich um eine ganze Potenz von $\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}$ unterscheiden; die entsprechenden Gitter T sind aber ohne weiteres identisch. Der an sich mehrdeutige Ausdruck $P^{\frac{1}{k}}$ ist durch unsere Verabredung, nach der ϱ eine reelle und posi-

tive Zahl sein soll, eindeutig bestimmt. Hiernach liefert unsere Formel wiederum k zulässige Orientierungen des Gitters Γ.

Ebenso finden wir natürlich für die Gitter $I_1, I_2 \ldots$ $k, k_2 \ldots$ mögliche Lagen. Unsere Normalfigur lässt sich daher auch im Falle $d > 0$ auf $h = k\, k_1 k_2 \ldots$ Arten entwerfen. Eine von diesen Arten wird für das Folgende willkürlich ausgewählt.

Auch was wir oben über den arithmetischen Charakter der Nebengitterzahlen sagten, gilt unverändert für den Fall einer negativen Discriminante.

Wir resumiren nochmals die Eigenschaften unserer Normalfigur, indem wir sagen:

Unsere Normalfigur besteht aus h Gittern. Je zwei conjugirte Gitter liegen bezüglich der Coordinatenaxen symmetrisch gegen das Hauptgitter. Das Haupt-

gitter selbst ebenso wie die Anceps-Gitter liegen symmetrisch gegen sich selbst. Gegenüber der Multiplication bilden die Punkte der Normalfigur ein abgeschlossenes Ganze, indem je zwei Punkte miteinander multiplicirt einen dritten Punkt ergeben, welcher wieder der Normalfigur angehört.

Die Theilbarkeitsgesetze im Gebiete der orientirten Gitterzahlen.

Wir geben nun unserer Betrachtung eine neue Wendung. Wir wollen nämlich das durch die Normalfigur definirte Zahlenmaterial auf die Theilbarkeitsgesetze untersuchen. Das allgemeine Resultat, zu welchem wir gelangen werden, ist dieses:

Die Theilbarkeitsgesetze der gewöhnlichen Zahlentheorie (eindeutige Zerlegung in Primfactoren) behalten in unserem Gebiete ihre unverän-

derte Gültigkeit.

Wir erinnern zunächst kurz an die Theilbarkeit im gewöhnlichen Zahlengebiete.

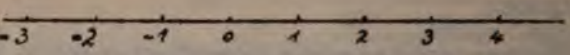
Man nennt eine ganze Zahl theilbar durch eine zweite, wenn der Quotient wieder eine ganze Zahl ist. Man bezeichnet ferner als Einheiten solche Zahlen, durch welche die 1 theilbar ist, und als Primzahlen solche, welche ausser durch sich selbst nur durch Einheiten getheilt werden können. In dem gewöhnlichen Zahlengebiete giebt es nur zwei Einheiten, nämlich die Zahlen $+1$ und -1.

Der Fundamentalsatz der gewöhnlichen Zahlentheorie besagt nun:

Jede ganze Zahl m lässt sich auf eine und nur auf eine Weise in ein Produkt von Primzahlen zerlegen, wobei natürlich Einheiten in beliebiger Weise den einzelnen Factoren hinzugefügt

werden können, wenn nur das Produkt derselben insgesammt + 1 ist.

Das gewöhnliche Zahlengebiet



mögen wir etwa gleichfalls geometrisch auffassen als ein Gitter von einer Dimension. Dadurch wird die Analogie mit unserem jetzigen Zahlengebiete klar. Wir haben jetzt nicht ein eindimensionales, sondern ein zweidimensionales Gebiet zu betrachten und in diesem nicht ein Gitter, sondern eine endliche Anzahl von Gittern. Gleichzeitig soll hiermit angedeutet werden, das wir bei der Verallgemeinerung der gewöhnlichen Theilbarkeitsgesetze bei dem zweidimensionalen Gebiete nicht stehen zu bleiben brauchen, sondern auch drei-dimensionale, vier-dimensionale Gitter etc betrachten können.

Wir übertragen nun die Definitionen der gewöhnlichen Zahlentheo-

rie auf unser zweidimensionales Ge-
biet. Dabei werden wir, strenge ge-
nommen, „Punkt" statt „Zahl"
sagen müssen.

1. Ein Punkt unseres Zahlengebie-
tes heisst theilbar durch einen an-
deren, wenn der Quotient beider ein
ganzzahliger Punkt ist, (d. h. ein
Punkt, dessen Coordinaten ganze
algebraische Zahlen sind).

2. Als „Einheitspunkte" bezeichnen
wir solche Punkte, durch welche der
Punkt (1, 1) theilbar ist. Die Einheits-
punkte sind allgemein gegeben durch
die Formel:

$$\varepsilon = \left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)\mu \qquad \bar{\varepsilon} = \left(\frac{t_0 - u_0\sqrt{d}}{2}\right)\mu,$$

wo t_0 und u_0 bestimmte ganzzahli-
ge Lösungen der Pell'schen Gleichung
bedeuten.

Wie wir wissen, giebt es bei posi-
tivem d unendlich viele Einheits-
punkte, bei negativem d nur eine
endliche Anzahl.

3. Wir nennen „Primpunkte" sol-

che Punkte $(\pi, \bar{\pi})$, welche durch keine anderen Punkte theilbar sind, als durch die Einheitspunkte und durch sich selbst.

4. Zwei Punkte heissen relativ prim, wenn es ausser den Einheitspunkten keine Punkte giebt, die in beiden aufgehen.

5. Ein Punkt (ξ, η) heisst der grösste gemeinsame Theiler zweier Punkte $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$, wenn die Punkte $\left(\frac{\xi_1}{\xi}, \frac{\eta_1}{\eta}\right), \left(\frac{\xi_2}{\xi}, \frac{\eta_2}{\eta}\right)$ ganzzahlige relativ prime Punkte sind.

Nachdem diese Definitionen vorausgeschickt sind, können wir dazu übergehen, die elementaren Rechenoperationen für unsere Gitterzahlen zu studiren. Wir betrachten

1. Addition und Subtraction.

Bezüglich dieser Operationen können wir nur das negative Resultat wiederholen, dass wir bereits pag 119 ausgesprochen haben,

dass wir nämlich bei Anwendung derselben im allgemeinen unseren Zahlencomplex verlassen. Wenn wir also an der Beschränkung festhalten, dass die vorzunehmenden Operationen immer wieder auf Punkte der Normalfigur führen, so sind Addition und Subtraktion von Gitterpunkten nicht gestattet, abgesehen von der selbstverständlichen Ausnahme, dass die Punkte dem selben Gitter angehören.

2. Multiplication. Diese Operation ist im Gegensatz zu den beiden eben genannten uneingeschränkt ausführbar, d. h. wir bekommen durch Multiplication zweier beliebiger Punkte unserer Normalfigur immer wieder einen Punkt derselben, wie wir bereits eingehend nachgewiesen haben.

3. Division. Bezüglich der Division der Gitterpunkte gilt der folgende Satz:

Ist ein Gitterpunkt durch einen

anderen theilbar, so ist der Quotient wieder ein Gitterpunkt.

Zu dem Beweise der folgenden Sätze bemerken wir ein für allemal, dass wir immer nur die auf die eine Gitterzahl (ξ) bezüglichen Gleichungen hinschreiben wollen, während wir in Gedanken durchaus an der Auffassung festhalten, dass jedem Gitterpunkte zwei Coordinaten (ξ, η) zugehören.

Es sei die Zahl ξ' aus dem Gitter G' durch die Zahl ξ aus dem Gitter G theilbar. Wir haben dann den Quotienten $\frac{\xi'}{\xi}$ zu betrachten, der nach Voraussetzung eine ganze algebraische Zahl ist. Um denselben nun zur besseren Beurtheilung einen rationalen Nenner zu geben, erweitern wir ihn mit der zu ξ conjugirten Zahl $\bar{\xi}$. Ist $\xi\bar{\xi} = r$, wo r eine ganze rationale Zahl bedeutet, so ist

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi'\bar{\xi}}{r}$$

Nun liegt $\bar{\xi}$ in dem zu G conjugirten Gitter $\bar{G}$, also $\xi'\bar{\xi}$ in dem Gitter $G'\bar{G}$, es sei etwa:

$$\xi'\bar{\xi} = \varrho\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right).$$

Dann ist

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi'\bar{\xi}}{r} = \varrho\left(\sqrt{a}\cdot\frac{x_0}{r} + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,\frac{y_0}{r}\right).$$

Da aber $\frac{\xi'}{\xi}$, wie wir vorausgesetzt haben, eine ganze algebraische Zahl sein soll, müssen nach unserem Hilfssatze pag 165 auch $\frac{x_0}{r}$, $\frac{y_0}{r}$ ganze rationale Zahlen sein, d. h. auch $\frac{\xi'\bar{\xi}}{r}$ oder $\frac{\xi'}{\xi}$ liegt in dem Gitter $G'\bar{G}$.

4. Eindeutige Zerlegung in Primpunkte.

Wir können jetzt dazu übergehen, unsere Betrachtungen über die Cisterpunkte zu krönen, indem wir folgendes Fundamentaltheorem beweisen:

Sofern wir von der willkürlichen Wahl hinzutreten der Ein-

heitspunkte absehen, lässt sich irgend ein Gitterpunkt unserer Normalfigur nur auf eine bestimmte Weise in Einheitspunkte zerlegen.

Den Beweis dieses Satzes führen wir in derselben Weise, wie es in der elementaren Zahlentheorie geschieht. Hier stützt man sich auf den Algorithmus der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzer Zahlen. Dementsprechend wollen wir uns auch hier fragen: Wie finden wir den grössten gemeinsamen Theiler zweier beliebig gegebener Gitterzahlen ξ und ξ'?

Dabei wollen wir an die hergebrachte Terminologie anknüpfen. Diese ist nur vom Standpunkte der historischen Entwickelung aus zu verstehen. Ursprünglich beschäftigte man sich ausschliesslich mit den Zahlen des Hauptgitters, um so mehr, als diese in den einfachsten Fällen $d = -3$ und $d = -4$ zugleich die allgemein-

sten Gitterzahlen darstellen. Diese Zahlen nannte man wirkliche Zahlen. Bei der Behandlung der höheren Fälle zeigte sich aber, dass man mit diesen Zahlen nicht auskommt, sondern auch die Zahlen der Nebengitter hinzunehmen muss, wenn man die eindeutige Zerlegbarkeit in Primfactoren aufrecht erhalten will; diese Nebengitterzahlen nannte man im Gegensatz ideale Zahlen.

Eine neue Auffassung wurde in diesen Theil der Zahlentheorie durch Dedekind hineingetragen. Dedekind bemerkte, dass man die Betrachtung dennoch auf das Hauptgitter beschränken kann, dass man nämlich jeder Nebenzahl sozusagen ein Bildgitter entsprechen lassen kann, welches in dem Hauptgitter enthalten ist. Dieses Bildgitter erzeugen wir auf folgende Weise. Wir multipliciren die Nebenzahl ξ mit allen Zahlen des conjugir-

ten Gitters. Dadurch erhalten wir nach Satz 1 sag 182 die Eckpunkte eines Gitters, welches dem Hauptgitter eingelagert ist. Wir bemerken, dass dasselbe dem eben benutzten conjugirten Gitter ähnlich ist, es entsteht nämlich dadurch, dass wir jenes in einem bestimmten Verhältnisse vergrös. sern und um einen gewissen (durch den Azimuthalfactor von ξ gege. benen) Winkel verdrehen.

Der Inbegriff der ξ-Coordinaten dieses Gitters nennt Dedekind ein „Ideal"

Diese Terminologie drückt eigent. lich, dem Wortlaute nach, das Umge. kehrte aus von dem, was sie aus. drücken sollte. Wenn man sich über. haupt auf den Standpunkt stellen will, dass die Zahlen des Hauptgit. ters allein wirklich, die der Neben. gitter ideal sind, so müsste man doch unser Bildgitter, welches die ide. ale Zahl realiciren soll und wel. ches ganz aus „wirklichen Zahlen"

besteht, eher ein „Real" nennen. Dieser Widerspruch zwischen Ausdruck und Sinn wird besonders fühlbar, wenn diese Zahl ξ im Besonderen eine Hauptzahl ist. Man wird der Gleichförmigkeit wegen auch diesen Zahlen ein Bildgitter entsprechen lassen. Wir haben dann ein reales Gegenbild einer schon an sich realen Grösse. Trotzdem wird ein solches Gitter „Hauptideal" genannt, wodurch der Anschein erweckt wird, als ob ein solches Gitter besonders wenig real wäre.

Wie dem auch sei, jedenfalls werden wir die Terminologie und noch in höherem Maasse den Gedankengang der Dedekind'schen Theorie für unsere Zwecke verwenden. Um dem Dedekind'schen „Ideal" näher zu kommen, können wir für „Bildgitter" etwa Idealgitter sagen.

Das Erste, was wir jetzt näher zu untersuchen haben, ist

die Beziehung zwischen den Gitterzahlen und Idealgittern.

Wir werfen in dieser Hinsicht zwei Fragen auf:

1. Ist durch ein gegebenes Ideal-gitter eine zugehörige Gitterzahl bestimmt?

2. Ist durch eine gegebene Gitterzahl ein zugehöriges Idealgitter bestimmt?

Ad 1. Die Antwort auf die erste Frage lautet, daß das Idealgitter nicht völlig eine bestimmte Gitterzahl charakterisirt, daß nämlich alle nur durch Einheiten verschiedenen Punkte unserer Figur als Bildgitter dasselbe Idealgitter liefern.

Sei nämlich $\mathfrak{J}$ ein Idealgitter, dem die Gitterzahl ξ entspricht, so daß

$$\mathfrak{J} = \xi . G$$

ist, wo G ein Gitter unserer Normalfigur bedeutet.

Wir fragen, giebt es noch eine andere Gitterzahl ξ' derart, daß auch

$$\mathfrak{J} = \xi' . G'$$

ist, wo G' wiederum ein Gitter unserer Normalfigur bedeutet.

Hier können wir nun zunächst behaupten, dass die Gitter G und G' identisch sein müssen. Da sie nämlich durch Multiplication mit ξ, resp. ξ' d. h. durch Ausübung von Ähnlichkeitstransformationen, in dasselbe Gitter Γ übergehen, so müssen sie jedenfalls ähnlich sein. Da aber beide unserer Normalfigur angehören sollen, müssen auch die Inhalte ihrer Fundamentalparallelogramme gleich sein, d. h sie müssen überhaupt identisch sein. Die beiden Ausdrücke

$$\xi G \text{ und } \xi' G$$

stellen nun dasselbe Gitter dar, es muss daher der eine aus dem anderen durch eine Automorphie, d. h. Multiplication mit einer Einheit ε hervorgehen, d. h. es muss

$$\xi' G = \varepsilon \xi G \text{ sein, oder } \xi' = \varepsilon \xi .$$

Dies Resultat können wir so in Worte fassen:

Durch ein gegebenes Idealgitter ist die Gitterzahl ξ nur bis auf hinzutretende Einheitsfaktoren bestimmt.

Ad 2. Unsere zweite Frage müssen wir bejahen. Wir werden nämlich sogleich für das zu einer Gitterzahl gehörige Idealgitter eine Eigenschaft kennen lernen, vermöge deren dasselbe umzweideutig festgelegt ist. Die bisherige Definition des Ideals ist insofern nicht ohne Weiteres eindeutig, als es ja vorkommen könnte, daß in unserer Normalfigur der durch das Ideal abzubildende Gitterpunkt mehreren unserer h Gitter gleichzeitig angehörte. Je nachdem wir ihn dann dem einen oder anderen dieser Gitter zuzählten, würden wir bei der Bildung des Ideals zu verschiedenen Ausdrücken

geführt werden.

Die Eigenschaft des Idealgitters, um welche es sich handeln soll, ist folgende: Das nach unseren früheren Regeln zu einem Gitterpunkte ξ hinzuconstruirte Idealgitter ist der Inbegriff aller durch ξ theilbaren Hauptzahlen.

Beweis: Erstens ist jede Zahl des Idealgitters eine durch ξ theilbare Hauptzahl.

Umgekehrt: Ist eine beliebige Hauptzahl w durch ξ theilbar und ξ in dem Gitter G enthalten, so ist $\frac{w}{\xi}$ nach Satz pag 178 in dem Gitter $H.G$ oder G_1 gelegen, wo G_1 das zu G conjugirte Gitter bedeutet, d. h. w wird erzeugt durch Multiplication von ξ mit einer Zahl des conjugirten Gitters, was wir eben behauptet haben.

Nehmen wir nun an, es gäbe zu einem Gitterpunkte zwei verschiedene Ideale! Wir erkennen sofort, dass diese Annahme

absurd ist, denn beide als verschiedene vorausgesetzte Idealgitter müssen mit dem Inbegriff der durch unsere Gitterzahl theilbaren Hauptzahlen zusammenfallen. Hiebei gibt es zu jedem Gitterpunkte unserer Figur nur ein bestimmtes Idealgitter.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist ersichtlich die, dass keine zwei Gitter unserer Figur (vom Anfangspunkte abgesehen) einen Punkt gemein haben können.

Wäre dieses nämlich der Fall, so könnten wir zu dem betr. Punkte zweier verschiedene Bildgitter hinzuconstruiren, indem wir ihn mit den Punkten der beiden Gitter multiplicirten, welche mit den Gittern, denen er selbst angehört, conjugirt sind.

Der letzte Satz ist für die Auffassung unserer Normalfigur natürlich von grosser Wichtigkeit. Die Uebersichtlichkeit dieses an

sich etwas complicirten geometrischen Gebildes wird durch ihn erheblich gesteigert - oder vielmehr, sie würde völlig verloren gehen, wenn der Satz nicht bestünde.

Wir schreiten nun zu einer neuen Definition der Idealgitter, die wir als die Dedekind'sche bezeichnen, da sie von diesem herrührt.

Ausser den Idealgittern sind dem Hauptgitter viele andere Gitter eingelagert. Ein solches dem Hauptgitter eingelagertes Gitter nennt nun Dedekind ein Ideal, wenn es die folgende Eigenschaft besitzt:

Ein beliebiger Punkt des Gitters giebt, multiplicirt mit einem beliebigen Punkte des Hauptgitters, wieder einen Punkt des Gitters.

Hier bietet sich uns die Aufgabe, die Beziehungen zwischen unserer und der Dedekind'schen Definition aufzusuchen, eventuell die Identität beider Definitionen nachzuweisen. Die Untersuchung wird sich mit der

Beantwortung der folgenden beiden Fragen zu befassen haben:

1. Ist ein Idealgitter in unserem Sinne stets ein Dedekind'sches Ideal?

2. Ist ein Dedekind'sches Ideal stets ein Idealgitter in unserem Sinne?

Ad 1. Die Antwort auf die erste Frage ist leicht mit ja zu geben, wie sofort daraus folgt, dass unsere Idealgitter der Inbegriff der durch eine feste Zahl theilbaren Haupt-zahlen sind. Greifen wir nämlich einen beliebigen Punkt des Ideal-gitters heraus, so ist dieser gleich dem Produkte von einer bestimmten Zahl ξ mit einer Zahl des zu dem Gitter von ξ conjugirten Gitters. Multipliciren wir dieses Product mit einer Hauptzahl, so ergiebt sich eine Zahl, welche nach unse-ren früheren Sätzen über Gitter-composition aufgefasst werden kann als Produkt derselben Zahl ξ mit einer gewissen Zahl dessel-ben zu ξ conjugirten Gitters. Die-

ses Product kommt aber nach Defi-
nition unter den Punkten des Fde-
algitters vor.

Ad 2. Die zweite Frage müssen
wir ebenfalls mit ja beantworten,
wie wir jetzt nachweisen wollen.

Wählen wir einen Basispunkt
des vorliegenden Gitters auf der
u-Axe, was stets möglich ist, so
können wir dasselbe schreiben:

$$G = ax + \left(m + n\,\frac{\sqrt{d}}{2}\right) y,$$

wobei wir uns der Einfachheit hal-
ber auf den Fall $d \equiv 0 \pmod 4$ be-
schränken. a, m, n bedeuten hier
ganze rationale Zahlen.

Nach Voraussetzung soll nun
G die Eigenschaft haben, daß, wenn
man eine beliebige Zahl aus G mit
einer beliebigen Hauptzahl multipli-
cirt, wieder eine Zahl aus G heraus
kommt. Wir machen deshalb den
Ansatz:

$$\left[ax + \left(m + n\,\frac{\sqrt{d}}{2}\,y\right)\right]\left[x' + \frac{\sqrt{d}}{2}\,y'\right] = ax'' + \left(m + n\,\frac{\sqrt{d}}{2}\right) y''$$

Hier müssen sich für alle ganzzahligen Werthe von x, y, x', y' auch ganzzahlige Werthe x'', y'' ergeben, d. h. die bilinearen Ausdrücke, welche x'' und y'' als Functionen von $x, y \mid x', y'$ darstellen, müssen ganzzahlige Coefficienten haben. Diese lauten aber:

$$x'' = xx' - \frac{m}{n} x y' \qquad - \frac{m^2 - n^2 \frac{d}{4}}{an} yy'$$

$$y'' = \frac{a}{n} x y' + y x' + \frac{m}{n} yy'.$$

Aus der zweiten Zeile folgt, daß a und m durch n theilbar sein müssen d. h. alle Zahlen des Gitters G sind durch die ganze rationale Zahl n theilbar; wir betrachten deshalb zunächst das einfachere Gitter:

$$\frac{G}{n} = \frac{a}{n} x + \left(\frac{m}{n} + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y,$$

das wir der Kürze halber wiederschreiben:

$$ax + \left(m + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y.$$

Die zugehörige Form lautet:

$$a^2 x^2 + 2am\, xy + \left(m^2 - \frac{d}{4}\right) y^2.$$

Aus den Formeln 1., die für unseren jetzigen Fall Geltung haben, wenn wir $n = 1$ setzen, folgt nun, dass $m^2 - \frac{d}{4}$ durch a theilbar sein muss. Die zum Gitter gehörige Form können wir daher auch schreiben:

$$a\left(ax^2 + 2mxy + \frac{m^2 - \frac{d}{4}}{a} y^2\right) \equiv a(ax^2 + bxy + cy^2).$$

Die in Klammern stehende Form ist nun eine Stammform, weil sie die Discriminante d besitzt; wir können deshalb setzen:

$$ax + \left(m + \frac{\sqrt{d}}{2}\right)y \equiv \varsigma\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\varsigma}\left(\sqrt{a}x + \frac{-b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} y\right)$$

d.h. das Gitter $ax + \left(m + \frac{\sqrt{d}}{2}\right)y$ ist das Bildgitter der Gitterzahl $\varsigma\sqrt{a}$ und daher das ursprüngliche Gitter G das Bildgitter der Gitterzahl $n \cdot \varsigma\sqrt{a}$, womit die Richtigkeit unserer Behauptung dargethan ist.

Wir wollen jetzt noch eine <u>Verallgemeinerung der gesammten Idealtheorie</u> kurz besprechen, welche uns durch die Normalfigur nahe gelegt wird. Da wir in dieser im

Haupt- und Nebengitter gleichzeitig und gleichberechtigt vor Augen haben, so werden wir es als eine Willkür bezeichnen, dass wir die Untersuchung der idealen Faktoren durchaus auf das Hauptgitter warfen. Es zeigt sich nämlich, dass wir das Hauptgitter ebensogut durch ein beliebiges, aber festes Nebengitter ersetzen können, welches wir sozusagen zum Bildträger für die den übrigen Punkten unserer Normal-Figur zuzuordnenden Bildgitter machen.

Wir verfahren folgendermassen: Sei G' das ausgezeichnete beliebige Gitter, welches wir zum Bildträger machen wollen, G dasjenige Gitter, in welchem der abzubildende Punkt liegt. Zunächst suchen wir das Gitter G'' auf, welches mit G componirt das Gitter G' ergiebt, so dass also

$$G.G'' = G' \quad \text{ist.}$$

Um das Bildgitter der zu G gehörigen Gitterzahl

$$\varsigma\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right)$$

zu entwerfen, multiplicieren wir diese mit allen Gitterzahlen von G'', nämlich mit

$$\varsigma''\left(\sqrt{a''}\,x + \frac{b''+\sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}\,y\right).$$

Das so entstehende Gitter

$$\varsigma\varsigma''\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right)\left(\sqrt{a''}\,x + \frac{b''+\sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}\,y\right)$$

ist nach der Compositionstheorie dem Gitter G' eingelagert und liefert ein Bild des dem Gitter G angehörigen Punktes. Wir werden dieses Bildgitter ein Nebengitterideal nennen. Wir sagen also:

Jedem Gitterpunkte unserer Normalfigur kann nicht nur im Hauptgitter ein Ideal entsprechend gesetzt werden, sondern auch in jedem fest verabredeten Nebengitter G'!

Diese neue Begriffsbildung wird

uns in der Theorie der singulären Moduln sehr nützlich sein, da sie der Gleichberechtigung der verschiedenen Wurzeln der Modulargleichung von vornherein Rechnung trägt.

Wollen wir das Nebengitterideal in Dedekind'scher Weise definiren, so constatiren wir zunächst die selbstverständliche Thatsache, dass die Zahlen desselben ein Gitter bilden, d. h. sich durch Addition und Subtraction reproduciren. Ferner aber: Multipliciren wir die Zahlen dieses Systems mit einer beliebigen Hauptzahl α, so ergeben sich Zahlen, welche demselben System angehören. In der That sind die Zahlen $G''\alpha$ wieder Zahlen des Gitters G'' daher gehören auch die Zahlen $\xi . G''\alpha$ dem ursprünglichen, in G' gelegenen Bildgitter an.

Wiederum können wir den Satz umkehren, wo er dann lautet:

Befindet sich in einem festen

Gitter G' ein eingelagertes Gitter welches die Eigenschaft hat, dass seine Punkte, multiplicirt mit beliebigen Punkten des Hauptgitters, wieder ihm angehörige Punkte ergeben, so ist dieses eingelagerte Gitter ein zu dem Gitter G' gehöriges Nebengitterideal.

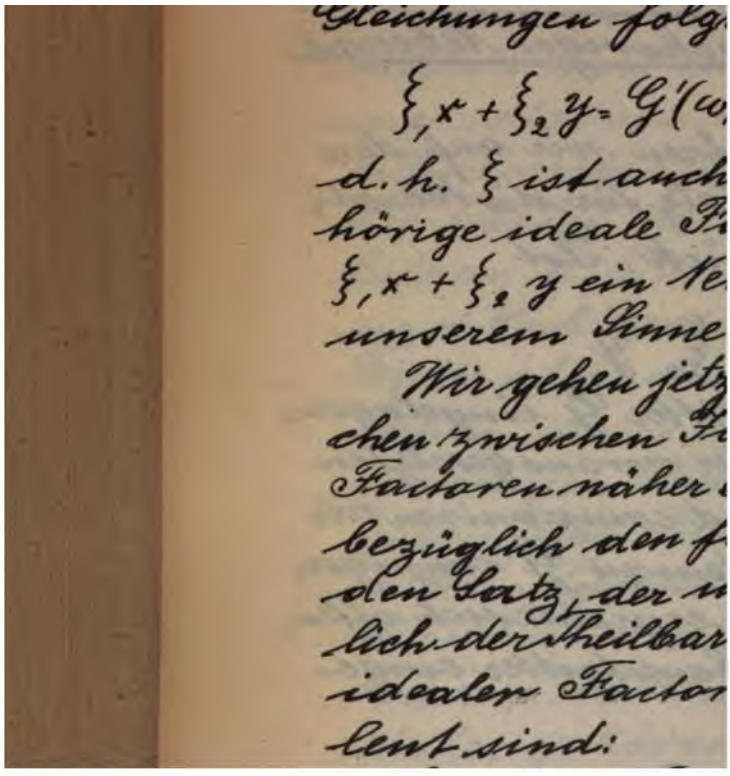
Den Beweis führen wir auf den entsprechenden Satz für die Hauptgitterideale zurück. Ist

$$\xi_1 x + \xi_2 y$$

ein dem festen Gitter G' eingelagertes Gitter mit der vorausgesetzten Eigenschaft, und componiren wir dasselbe mit dem zu G' conjugirten Gitter $\bar{G}'$, so ergiebt sich offenbar ein dem Hauptgitter eingelagertes Gitter:

$$(\xi_1 x + \xi_2 y) \cdot \bar{G}' = \omega_1 x + \omega_2 y,$$

das ebenfalls die Eigenschaften eines Dedekind'schen Ideals besitzt. Entspricht ihm der ideale



Gleichungen folg

$\xi_1 x + \xi_2 y = G'(\omega$

d. h. ξ ist auch

hörige ideale Z

$\xi_1 x + \xi_2 y$ ein Ve

unserem Sinne

Wir gehen jetz

chen zwischen Z

Factoren näher

bezüglich den f

den Satz, der u

lich der theilbar

idealer Factor

lent sind:

der zugehörige ideale Factor durch dieselbe theilbar.

Beweis: Bezeichnen wir das Ideal mit $\xi . G$ und sind alle Zahlen desselben durch die ganze algebraische Zahl η theilbar, so sind alle Zahlen des Ideals $\xi^h G^h$ oder $\xi^h H$ durch η^h theilbar. Da nun in H die 1 enthalten ist, muss ξ^h durch η^h theilbar sein, oder $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^h$ eine ganze algebraische Zahl. Ist aber $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^h$ eine ganze algebraische Zahl, so ist es auch $\frac{\xi}{\eta}$. Denn genügt $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^h$ etwa der Gleichung

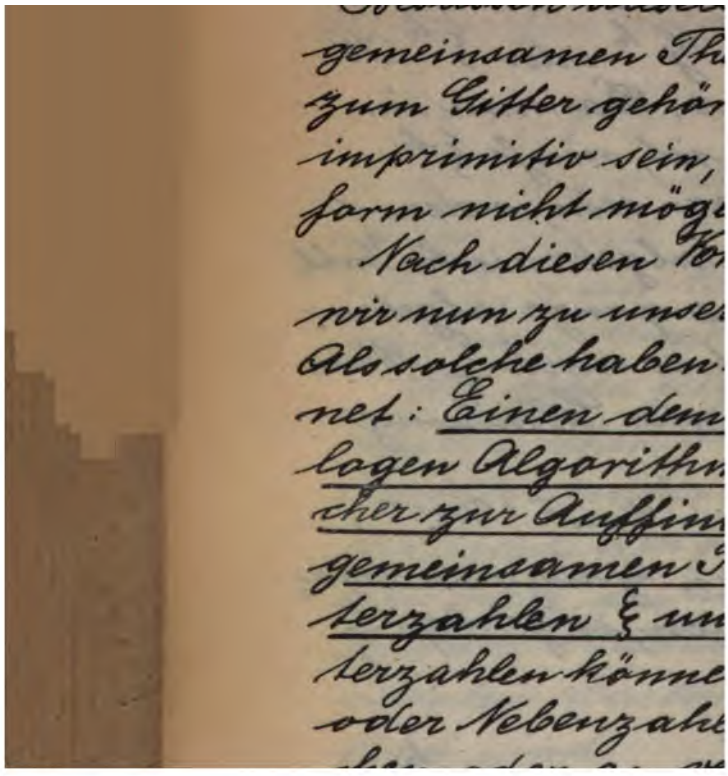
$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots . a_{n-1} x + a_n = 0 ,$$

wo $a_1 , \ldots a_{n-1} , a_n$ ganze rationale Zahlen bedeuten, so genügt $\frac{\xi}{\eta}$ der Gleichung

$$x^{nh} + a_1 x^{(n-1)h} + \ldots . a_{n-1} x^h + a_n = 0 ,$$

ist also ebenfalls eine ganze algebraische Zahl.

Wir fügen dem vorstehenden Theorem noch den folgenden leicht



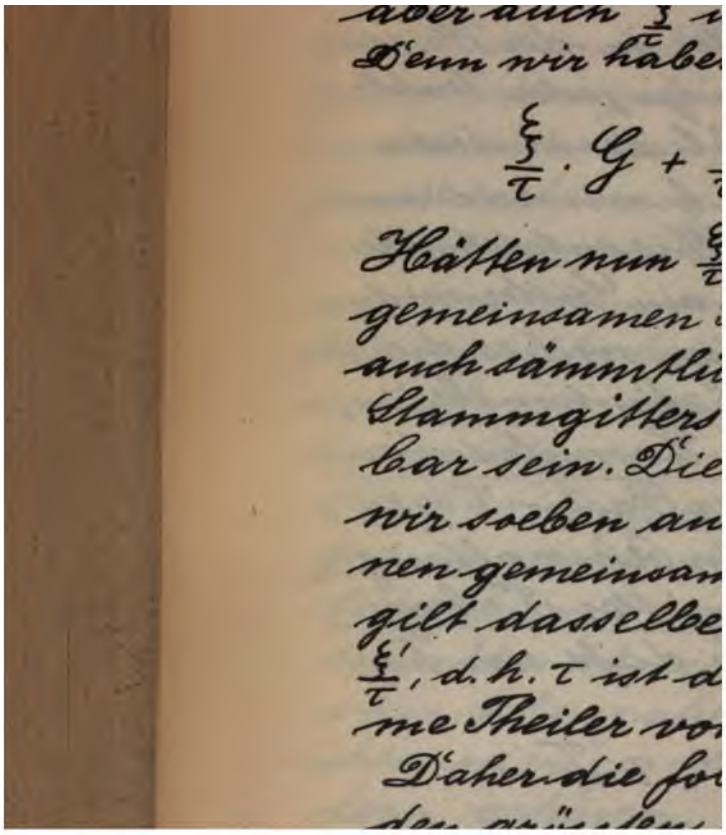
genau nachgebildet ist, soll in Folgendem bestehen. Wir bilden zu beiden Zahlen die zugehörigen Idealgitter:

$$\xi . G \text{ und } \xi' . G'$$

Wir fügen diese Gitter in der Weise zusammen, dass wir zu jeder Zahl des einen jede Zahl des anderen Gitters addiren, d. h. wir addiren die beiden Gitter. Die entstehende Summe ist wieder ein Gitter und zwar ein Idealgitter, weil es die Dedekind'schen Definitionsbedingungen befriedigt. Es muss daher zu ihm ein idealer Factor τ gehören, nach dessen Abspaltung noch das Stammgitter T übrig bleiben möge, so dass wir haben:

$$\xi . G + \xi' . G' = \tau . T$$

Wir behaupten nun, dass τ der gesuchte grösste gemeinsame Theiler von ξ und ξ' ist. Denn



aber auch $\frac{\xi}{\tau}$ r
Denn wir habe

$$\frac{\xi}{\tau} \cdot G +$$

Hätten nun $\frac{\xi}{\tau}$
gemeinsamen
auch sämmtli
Stammgitters
bar sein. Die
wir soeben an
nen gemeinsam
gilt dasselbe
$\frac{\xi'}{\tau}$, d. h. τ ist d
me Theiler vo
Daher die fo

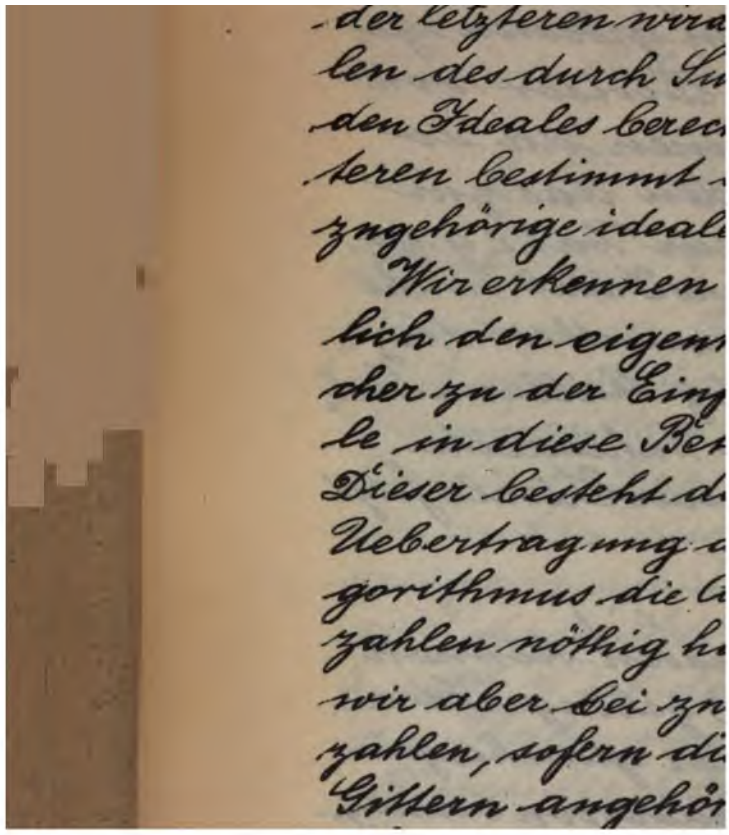
den zu dem entstehenden Ideal gehörigen idealen Factor.

Um zu zeigen, dass dieser Prozess dem der gewöhnlichen Zahlentheorie parallel geht, bestimmen wir etwa den grössten gemeinschaftlichen Divisor von 6 und 9. Wir können da so sagen: Wir bilden das zur Zahl 6 und das zur Zahl 9 gehörige Ideal. Dieses Ideal besteht natürlich aus der Gesammtheit der durch 6 bez. durch 9 theilbaren Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Durch Addition beider Ideale folgt das Zahlensystem

$$0, 3, 6, 9, \ldots,$$

welches wir auffassen können als das zur Zahl 3 gehörige Ideal. Diese Zahl 3 ist der gesuchte grösste gemeinsame Theiler von 6 und 9.

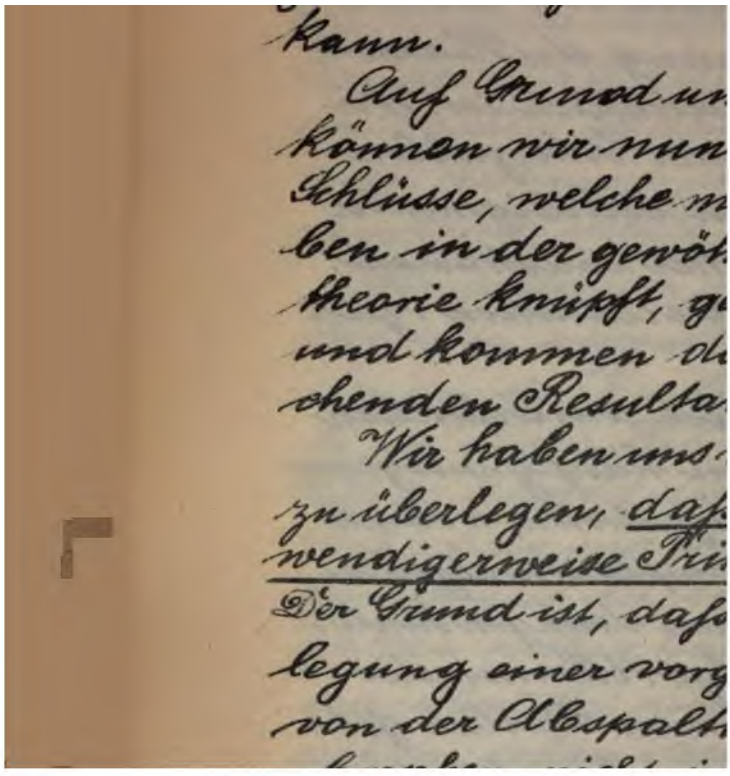
Nachdem wir im Vorstehenden die begriffliche Seite unseres Prozesses geschildert haben, wird es keine Schwierigkeit haben, densel-


der letzteren wird
len des durch Su
den Ideales berec
teren bestimmt
zugehörige ideale
Wir erkennen
lich den eigen
cher zu der Ein
le in diese Ber
Dieser besteht d
Uebertragung
gorithmus die
zahlen nöthig h
wir aber bei zu
zahlen, sofern di
Gittern angehö

dass man ihnen je ein Zahlensystem des Hauptgitters zuordnet. Die so entstehenden Bilder kann man dann nach Belieben durch Addition combiniren.

Gleichzeitig bemerken wir nochmals, dass die Auszeichnung des Hauptgitters hierbei unwesentlich ist. Wir können die Bilder der Gitterzahlen ebensogut in einem beliebigen, aber festen anderen Gitter construiren, weil auch diese die Addition zulassen.

Wir möchten hier noch ausdrücklich der in den Büchern häufig ausgesprochenen Ansicht entgegentreten, wonach es im Gebiete der complexen algebraischen Zahlen keinen dem gewöhnlichen analogen Algorithmus des grössten gemeinsamen Theilers gebe. Diese Ansicht ist nur berechtigt, wenn man sich auf den speciellen Standpunkt stellen will, dass allein die Zahlen des Hauptgitters als Material gegeben sind. Dem-



kann.

Auf Grund un
können wir nun
Schlüsse, welche m
ben in der gewöh
theorie knüpft, g
und kommen d
chenden Resulta
Wir haben uns
zu überlegen, daß
wendigerweise Tri
Der Grund ist, daß
legung einer vorg
von der Abspalt

Ferner aber handelt es sich um den Satz, daß eine beliebige Zahl sich auf eine und nur auf eine Weise in ein Produkt von Primzahlen zerlegen lasse.

Der Hauptpunkt beim Beweise desselben bildet, wie bekannt, schon in der gewöhnlichen Zahlentheorie das folgende Lemma:

Wenn das Produkt zweier Zahlen durch eine Primzahl theilbar ist, so wird nothwendiger Weise eine der beiden Zahlen durch die Primzahl getheilt.

Dieses Lemma wollen wir hier für unser Zahlengebiet in Kürze beweisen, während wir die übrigen Theile des Beweises überspringen können, da sie aus der gewöhnlichen Zahlentheorie unmittelbar herübergenommen werden können.

Seien also α und β zwei Gitterzahlen, von denen bekannt ist, daß ihr Produkt $\alpha\beta$ durch eine Primzahl π theilbar ist. Wir

nehmen an, dass etwa α durch π nicht theilbar sei. Dann ist der grösste gemeinsame Theiler von α und π die Einheit. Bilden wir nun die zu α und π gehörigen Idealgitter, so erhalten wir durch Summation ein neues Ideal, welches zu dem Factor 1 gehört, also das ganze Hauptgitter ausmacht. In diesem muss insbesondere der Einheitspunkt (1, 1) selbst enthalten sein. Hiethin haben wir die Gleichung:

$$\alpha A + \pi \Pi = 1,$$

unter A und Π geeignet gewählte Zahlen aus den zu α und π conjugirten Gittern verstanden. Diese Gleichung multipliciren wir beiderseits mit β. Es ist aber in der Gleichung

$$\alpha \beta A + \beta \pi \Pi = \beta$$

die linke Seite nach Voraussetzung durch π theilbar. Also ist es auch

die rechte. Wir sehen also, dass von den beiden Zahlen α und β nothwendig eine durch π theilbar ist.

Von hier aus folgt der Beweis des Fundamentalsatzes über die eindeutige Zerlegbarkeit eines jeden Gitterpunktes in Primpunkte in bekannter Weise von selbst.

Wir schliessen unsere Darstellung der für unser Zahlengebiet geltenden Theilbarkeitsverhältnisse damit, dass wir eine Aufzählung sämtlicher in unserem Zahlgebiete vorhandenen Primzahlen vornehmen.

1. Die Aufzählung wird durch den folgenden Satz erleichtert.

Man erhält alle Primpunkte unserer Figur, wenn man zusieht, in welche Factoren sich die auf der horizontalen Geraden des Hauptgitters gelegenen Punkte (p, p) zerlegen lassen, deren Coordinaten p Primzahlen im Sinne der gewöhnlichen Zahlentheorie sind.

In der That, sei $(\pi, \bar{\pi})$ ein belie-

biger Primpunkt, welcher mit seinem conjugirten $(\bar{\pi}, \pi)$ multiplicirt den rationalen Punkt (m, m) ergiebt. Hier ist, wie wir behaupten, m eine gewöhnliche Primzahl p oder das Quadrat einer solchen. Denn

1. kann m nicht durch 2 verschiedene rationale Primzahlen p und q theilbar sein. Wäre nämlich:

$$m = p \cdot q \cdot m',$$ so hätten wir, da auch

$$m = \pi \cdot \bar{\pi}$$

unter allen Umständen zwei verschiedene Zerlegungen von m, mögen nun p, q und m' noch weiter zerlegbar sein oder nicht.

2. Es muss also m die Potenz einer gewöhnlichen Primzahl sein:

$$m = p^{\lambda}.$$

Hier kann nun λ höchstens gleich 2 sein, weil sonst offenbar m in mehr als 2 Primfactoren zerlegbar wäre, was der Gleichung $m = \pi \cdot \bar{\pi}$ widerspricht.

Hiermit ist die Richtigkeit des angegebenen Satzes dargethan, aber implicite auch schon eine Eintheilung der aufzuzählenden Primzahlen gegeben. Wir werden dieselben nämlich in 2 Categorieen eintheilen, je nachdem $\lambda = 1$ oder $\lambda = 2$ ist.

I $\lambda = 1$. Es ist $\pi \cdot \bar{\pi} = p$

Hier sind wieder noch 2 Fälle zu scheiden

a) π und $\bar{\pi}$ verschieden

b) $\pi = \bar{\pi}$ (natürlich bis auf Einheiten)

In beiden Fällen bleibt die gewöhnliche Primzahl p nicht mehr Primzahl in unserem Zahlsystem, sondern ist noch weiter in 2 Primfaktoren zerlegbar.

II) $\lambda = 2$, $\pi \cdot \bar{\pi} = p \cdot p$

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt:

$$\pi = \bar{\pi} = p.$$

In diesem Falle ist die gewöhnliche Primzahl p auch Primzahl in unserem erweiterten Zahlsystem.

2. Wir fragen nun weiter, wann die Fälle I & II eintreten werden. Dies bezüglich haben wir den Doppelsatz:

Der Fall I tritt ein, d. h. die gewöhnliche Primzahl p ist in das Product zweier conjugirter Primfactoren spaltbar, wenn p durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar ist.

Der Fall II tritt ein, d. h. die gewöhnliche Primzahl p ist nicht weiterzerlegbar, wenn p nicht durch eine quadr. Form der Discr. d darstellbar ist.

Der erste Theil dieses Satzes ist selbst verständlich, denn die Darstellung von p durch eine quadr. Form der Discriminante d giebt direct die beiden Primfactoren an, in die p zerlegbar ist.

Die Richtigkeit des zweiten Theiles ist leicht auf indirecte Weise zu schliessen. Angenommen p wäre nicht durch eine quadr. Form der Discriminante d

darstellbar und doch zerlegbar, etwa

$p = \pi . \bar{\pi}$, so könnten wir setzen

$$\pi = \rho\left(\sqrt{a}\, x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}} y_0\right) \text{ und } \bar{\pi} = \frac{1}{\rho}\left(\sqrt{a}\, x_0 + \frac{b+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} y_0\right).$$

Hieraus würde folgen:

$p = a x_0^2 + b x_0 y_0 + c y_0^2$ und $b^2 - 4ac = d$,

d.h. p wäre doch durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar, was der Voraussetzung widerspricht. Es kann deshalb p in dem angenommenen Falle nicht weiter zerlegbar sein.

3. Bevor wir auch die Fälle I a und I b trennen, fügen wir noch folgenden Satz ein:

Lässt sich p durch eine Form der Discriminante d darstellen, so giebt es speciell auch eine solche Form, deren erster Coefficient p ist.

Es sei

$$p = a x_0^2 + b x_0 y_0 + c y_0^2,$$

wo x_0, y_0 zwei ganze rationale

Zahlen bedeuten, die nothwendig theilerfremd sein müssen, da p Primzahl sein soll. Wir wenden nun auf die Form $ax^2+bxy+cy^2$ die Substitution:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned}\right| \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

an.

Hierdurch entstehe die Form

$$a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2.$$

In unserer linearen Substitution können wir die Coefficienten α und δ willkürlich wählen mit der alleinigen Beschränkung, dass sie keinen gemeinsamen Theiler haben dürfen. Wie aus dem Anfang dieser Vorlesung bekannt, lassen sich dann in der That stets correspondirende Werthe von β und γ bestimmen. Speciell wollen wir α und γ gleich x_0 und y_0 nehmen. Dann gehört zu den Werthepaare $x'=1, y'=0$ das Werthepaar $x=x_0$,

$y = y_0$. Unsere Form (a', b', c') muss also für $x' = 1, y' = 0$ den Werth p liefern; wir haben mithin:

$a' = p$, was zu beweisen war.

4 Wir gehen jetzt dazu über, die Criterien für die Fälle I a und I b anzugeben:

I a. Die Primzahl p ist in das Produkt zweier verschiedener Primfaktoren zerlegbar, wenn p nicht in d aufgeht (und wenn, wie bereits angegeben wurde, p durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar ist.)

I b. Die Primzahl p zerfällt in das Produkt zweier gleicher Primfaktoren $\sqrt{p} \cdot \sqrt{p}$, wenn p in d aufgeht.

Die Beweise für diese Angaben liegen in den folgenden Ausführungen.

Ist d durch p theilbar, so ist auch der zweite Coefficient der Form (p, b', c') durch p theilbar. Durch Reduktion kann man einen der beiden Fälle erreichen: $b' = 0$ oder

$c' = p$. In beiden Fällen ist die Form eine Anceps form.

Sie lautet:

$$px^2 - \frac{d}{4p} y^2, \text{ beziehungsweise}$$

$$px^2 + pxy + \frac{p^2 - d}{4p} y^2.$$

Auf Grund unserer Orientirung der Ancepsgitter ergiebt sich die Zerlegung

$$p = \sqrt{p} \cdot \sqrt{p},$$

p erscheint also als das Quadrat einer sich selbst conjugirten Primzahl.

Geht p nicht in d auf, so ist auch der zweite Coefficient von (p, b', c') nicht durch p theilbar. Wir erhalten daher hier eine Zerlegung:

$p = \varrho \sqrt{p} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \sqrt{p}$, wo ϱ von 1 und einer Einheit verschieden ist.

p erscheint also als das Produkt zweier ungleicher Primzahlen.

5. Wir wollen jetzt die vorstehenden Kriterien noch etwas vereinfachen, indem wir die Darstellbar-

keit von p durch eine quadratische Form der Discriminante d auf das Legendre'sche Symbol $\left(\frac{d}{p}\right)$ zurückeführen.

Ist nämlich p durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar, so giebt es eine quadratische Form mit dem ersten Coefficienten p:

$$px^2 + bxy + cy^2,$$ so dass

$b^2 - 4pc = d$, also $b^2 \equiv d \pmod{4p}$ ist.

Umgekehrt besteht die Congruenz $b^2 \equiv d \pmod{4p}$, so lässt sich stets p durch eine quadratische Form

$$px^2 + bxy + \frac{b^2-d}{4p}y^2$$

mit der Discriminante d darstellen.

Für das Folgende haben wir jetzt die Fälle $p = 2$ und p ungerade gesondert zu betrachten.

6. Wir untersuchen zunächst die Zerlegbarkeit von 2, betrachten also die Congruenz:

$$b^2 \equiv d \pmod 8$$

Von Hause aus hat die Discriminante d eine der Formen:

$$8\sigma,\ 8\sigma+1,\ 8\sigma+4,\ 8\sigma+5.$$

Hiervon erledigen sich die Fälle $d = 8\sigma$ und $d = 8\sigma+4$ sofort; beidemale ist nämlich d durch 2 theilbar; infolgedessen zerfällt 2 in die Primfactoren $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$.

Ist $d = 8\sigma+1$, so ist die Congruenz $b^2 \equiv d \pmod 8$ lösbar, daher 2 durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar und folglich in zwei verschiedene Primfactoren zerlegbar.

Ist $d = 8\sigma+5$, so ist die obige Congruenz nicht lösbar, daher auch 2 nicht durch eine Form der Discriminante d darstellbar und infolgedessen unzerlegbar. Zusammenfassend haben wir:

$d \equiv 0 \pmod 4$ . . . $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$d = 8\sigma+1$ . . . . 2 zerfällt in das Produkt zweier verschiedener Primfactoren

$d = 8\sigma+5$ 2 ist unzerlegbar.

7. Wir betrachten jetzt den Fall, dass p eine ungerade Primzahl ist. In diesem Falle zieht die Lösbarkeit der Congruenz $b^2 \equiv d \pmod{p}$ diejenige der Congruenz $b^2 \equiv d \pmod{4p}$ stets nach sich. Wir können daher sofort das folgende Resultat hinschreiben:

$\left(\frac{d}{p}\right) = +1$; p zerfällt in das Produkt zweier verschied. Primfactoren

$\left(\frac{d}{p}\right) = 0$; p " " " " " gleicher " $\sqrt{p}\sqrt{p}$.

$\left(\frac{d}{p}\right) = -1$; p ist unzerlegbar, also selbst Primzahl.

8. Wir wollen endlich bei einer beliebigen Zahl

$$n = p^{\kappa} q^{\lambda} \ldots$$

fragen auf wieviel Arten dieselbe als Produkt zweier conjugirter Zahlen ν und ∇ unseres Gebietes aufgefasst werden kann. Zu dem Zwecke zerlegen wir $p, q \ldots$ sofern es angeht und ordnen die einzelnen Factoren $\pi, \overline{\pi}$ auf alle Weisen zu conjugirten Produkten. Dies

ist eine rein combinatorische Aufgabe.

Bemerken wir noch, dass diese Frage übereinstimmt mit der Frage nach der Anzahl der Darstellungen, welche die Zahl n durch Formen unserer Discriminante zulässt. In der That giebt jede solche Darstellung eine Zerlegung der Zahl n und umgekehrt.

Geometrisch bedeutet diese Anzahl die Zahl derjenigen Gitterpunkte, welche in der Normalfigur die Entfernung V_n von O haben. Aus der vorstehenden Regel zur Berechnung jener Zahl ersehen wir, dass sie bei einer grösseren Anzahl in n vorkommender Factoren sehr erheblich sein kann. Es giebt dann eine grosse Menge von Punkten, welche von O dieselbe Entfernung V_n haben. Aber alle diese Punkte sind in unserer Normalfigur verschieden, weil sie sich eben aus verschiedenen Primpunkten aufbauen.

9. VII. 96. Hiermit schliessen wir unsere Behandlung der Compositionstheorie ab. Wir sollten dieselbe eigentlich noch weiter führen, indem wir sie von den Stammgittern (Discriminante d), auf beliebige Zweiggitter (Discriminante $D = n^2 d$) ausdehnen. Diese Verallgemeinerung bietet keine principiellen Schwierigkeiten, muss aber hier der Kürze halber übergangen werden. Trotzdem werden wir die bisherigen Resultate gelegentlich auch für Zweiggitter in Anspruch nehmen.

III. Haupttheil.

Theorie der singulären elliptischen Gebilde.

Wir legen eine ganzzahlige negative Discriminante zu Grunde und betrachten die zu dieser Discriminante gehörige Normalfigur, bestehend aus h Gittern in bestimmter Orientirung. Die hierdurch definirten Gitterzahlen sind gewöhnliche complexe Zahlen von der Form $u \pm i v$. Die Discriminante wollen wir bezeichnen mit $D = -\nabla$, (indem wir uns das Zeichen Δ für die Discriminante der elliptischen Functionen vorbehalten).

Zu jedem dieser Gitter gehört ein gewisses elliptisches Gebilde. Dasselbe heisst singulär, weil die aus den Perioden w_1, w_2 (den Basiszahlen unseres Gitters) gebildete quadratische Form

$f = (w_1 x + w_2 y)(\bar{w}_1 x + \bar{w}_2 y) = ax^2 + bxy + cy^2$ eine ganzzahlige Form ist.

Wir studiren die Besonderheiten dieser singulären Gebilde. Dieselben bestehen allgemein zu reden darin, dass die Compositionstheorie auf sie Anwendung findet.

Speziell erinnern wir an den Schering'schen Satz (vergl. pg. 145) wonach jedes unserer h Gitter (bez. elliptischer Gebilde) durch eine Anzahl erzeugender Gitter (Gebilde) dargestellt werden kann in der Form

$$G = \Gamma^{\alpha} \Gamma^{\alpha_1} \ldots .$$

Um an diese bestimmte Art der Darstellung zu erinnern, schreiben wir statt G: G_α (oder auch eventl. $G^{(\alpha)}$). Die Thatsache der Gittercomposition drückt sich dann einfach durch die Formel aus

$$G_\alpha \cdot G_{\alpha'} = G_{\alpha+\alpha'}.$$

Unter den Invarianten unserer elliptischen Gebilde werden wir dabei

nach den früheren Entwickelungen die folgenden berücksichtigen, die wir nach der Stufenzahl bez. nach ihrem Grade in den Variabeln w_1, w_2 noch einmal tabellarisch zusammenstellen:

	Modulfunctionen (Grad = 0)	Modulformen (Grad ≠ 0)
1. Stufe	$j = 1728 J$	g_2. g_3, $\sqrt[12]{\Delta}$ Grad −4, −6, −1
3. Stufe	ξ	ξ_1, ξ_2 Grad + 1.

"Wir unterwerfen nun unsere Gebilde beliebigen Transformationen höherer Ordnung, suchen also zu den gegebenen Fonktgittern neue auf, welche in jene eingelagert sind. Nun kennen wir für jedes unserer k Gitter eine besondere Kategorie voneingelagerten Gittern, nämlich die Idealgitter.

Die Besonderheit, welche unsere

singulären Gebilde gegenüber Transformationen höherer Ordnung darbieten, werden darin bestehen, daß unter den transformirten Gebilden diejenigen vorhanden sind, welche den Idealgittern entsprechen.

Aus dieser Bemerkung fliessen in der That höchst bemerkenswerthe Consequenzen bezüglich der soeben genannten Invarianten. Wir behandeln zunächst die Invarianten der p^{te} Stufe und unterwerfen dieselben einer Transformation vom Primzahlgrade p (wobei wir $p > 2$ voraussetzen mögen).

Wir müssen unterscheiden, ob die Zahl p in unserer Normalfigur unzerlegbar ist, ob sie in das Produkt zweier gleicher oder zweier verschiedener Factoren zerfällt. Ueber den ersten Fall ist nichts Besonderes zu bemerken, weil sich hier die Transformationstheorie der singulären Gebilde ebenso gestaltet wie die der

nichtsingulären. Der zweite Fall tritt nur bei denjenigen Primzahlen auf, welche Theiler der Discriminante D sind, und soll zunächst zurückgeschoben werden. Wir setzen demnach voraus, dass der dritte Fall vorliegt, dass wir also haben

$$p = \pi . \bar{\pi}$$

wo π und $\bar{\pi}$ zwei verschiedene Primzahlen sind, welche bez. zu den Gittern G_β und $G_{-\beta}$ gehören mögen.

Es handle sich um die Transformation des elliptischen Gebildes G_α, welches nach Belieben also zu dem Hauptgitter oder zu einem Nebengitter gehörig vorausgesetzt werden möge. Wir kennen von vornherein zwei dem Gitter G_α eingelagerte Gitter, nämlich die beiden (Haupt- oder Neben-) Idealgitter

$$\pi . G_{\alpha-\beta}, \quad \bar{\pi} . G_{\alpha+\beta}.$$

In der That gehören alle Ecken

dieser beiden Gitter nach der Composi-tionstheorie dem Gitter G_α an. Wir haben nämlich:

$$G_\beta \cdot G_{\alpha-\beta} = G_\alpha \quad \text{bez.} \quad G_\beta \cdot G_{\alpha+\beta} = G_\alpha .$$

Die Perioden der durch unsere Ideal-gitter definirten elliptischen Gebilde sind ersichtlich, wenn wir mit $w_1^{(\alpha-\beta)}$ $w_2^{(\alpha-\beta)}$ etc. die Perioden von $G^{(\alpha-\beta)}$ etc. bezeichnen, die fol-genden:

$$\begin{cases} \pi . w_1^{(\alpha-\beta)} \\ \pi . w_2^{(\alpha-\beta)} , \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\pi} . w_1^{(\alpha+\beta)} \\ \bar{\pi} . w_2^{(\alpha+\beta)} . \end{cases}$$

Diese Perioden entstehen also aus den Perioden von $G_{\alpha-\beta}$ und $G_{\alpha+\beta}$ durch Multiplication mit der com-plexen Grösse π oder $\bar{\pi}$, oder wie man kurz sagt, durch „complexe Multiplication."

Beiläufig bemerken wir, dass die zu unsern beiden Idealgittern ge-hörige quadratische Form die fol-gende ist:

$$f = \pi\bar{\pi}(w_1^{(\alpha\mp\beta)} x + w_2^{(\alpha\mp\beta)} y)(\bar{w}_1^{(\alpha\mp\beta)} x + w_2^{(\alpha\mp\beta)} y) .$$

Sie entsteht also aus der zu $G_{\alpha,\beta}$ gehörigen Form durch Multiplication mit p; sie ist imprimitiv und hat die Discriminante $p^2 D'$.

Hinsichtlich des Elementarparallelogramms der Idealgitter folgt hieraus: Dieses ist gleich $p\sqrt{-D'}$, also p-mal so gross wie das Elementarparallelogramm eines der gegebenen h Gitter.

Infolge dessen entstehen unsere Idealgitter aus dem Gitter $G_{\alpha,\beta}$ durch Transformation p^{ter} Ordnung. Nun wissen wir von früher her (vergl. pg 29), dass allgemein aus einem beliebigen Gitter durch Transformation p^{ter} Ordnung $p+1$ neue grossmaschige Gitter entstehen, die dem gegebenen Gitter eingelagert sind.

Von diesen $p+1$ Gittern sind in unserem Falle zwei von vornherein bekannt, nämlich unsere Idealgitter.

Wir haben damit den centralen

Satz in der Theorie der singulären elliptischen Gebilde bezeichnet. Gehen wir zu, welche algebraischen Folgerungen sich daraus ergeben.

Wir betrachten zunächst die Transformationsgleichung für die Invariante j:

$$F(j', j) = 0$$

und verstehen unter j_λ die zum G_λ der G_λ gehörige Invariante, die wir j_λ nennen. Die Invarianten der $p+1$ transformirten Gitter j' werden durch die Wurzeln unserer Gleichung bestimmt. Denken wir uns nun die Invarianten $j_1 \dots j_k$ gegeben, welche zu den ursprünglichen Gittern unserer Normalfigur gehören, so sind von den $p+1$ Wurzeln der Transformationsgleichung zwei bekannt, nämlich die Invarianten der Idealgitter. Da j nur von dem Periodenquotienten $\frac{w_1}{w_2}$ abhängt und da die Perioden der Idealgitter aus denen von G_λ B

und $G_{\alpha+\beta}$ durch complexe Multiplikation hervorgehen, so sind die Invarianten der Idealgitter mit den Invarianten $J_{\alpha-\beta}$ und $J_{\alpha+\beta}$ identisch. Es sind also in der That von den $p+1$ Wurzeln zwei bekannt, nämlich

$$J' = J_{\alpha-\beta} \text{ und } J' = J_{\alpha+\beta}.$$

Der soeben abgeleitete Satz lässt eine wichtige Verschärfung zu, nämlich:

<u>Die übrigen $p-1$ Wurzeln der Transformationsgleichung sind von den singulären $J_1, J_2, \ldots J_k$ verschieden.</u>

Der Beweis für diese Behauptung ist sehr einfach. Soll $J' = J_k$ sein, so muss das zu J' gehörige Gitter G' dem zu J_k gehörigen Stammgitter ähnlich sein, also

$$G' = \mu_{\alpha-k} G_k$$

Um die Natur der Zahl $\mu_{\alpha-k}$ zu erkennen, komponire ich beiderseits mit G_{-k}, so dass sich ergiebt:

$$G' G_{-k} = \mu_{\alpha-k} H.$$

Da nun H die 1 enthält, muss $\alpha_{\lambda-k}$ in dem Gitter $G' G_{-k}$ vorkommen und auch, da G' in G_λ enthalten ist, in dem Gitter $G_\lambda \cdot G_{-k} = G_{\lambda-k}$. Es ist also $\alpha_{\lambda-k}$ eine Gitterzahl des Gitters $G_{\lambda-k}$. Hieraus folgt, dass G' ein dem Gitter G_λ eingelagertes Idealgitter ist. Nun ergiebt sich aus der Eindeutigkeit der Factorenzerlegung von p, dass es nur zwei in G_λ durch Transformation p^{ter} Ordnung eingelagerte Idealgitter giebt, nämlich

$$\pi \cdot G_{\lambda-\beta} \quad \text{und} \quad \bar{\pi} \cdot G_{\lambda+\beta}.$$

Mit einem von diesen muss also G' nothwendig identisch sein, d. h. es ist J_k entweder gleich $J_{\lambda-\beta}$ oder gleich $J_{\lambda+\beta}$, wie wir behauptet haben.

Nehmen wir ferner die Multiplicatorgleichung:

$$\Phi(M, J) = 0.$$

Diese ist in M vom $(p+1)^{\text{ten}}$

Grade; ihre Coefficienten sind nach Adjunction der Grössen f_2, f_3 (vergl. pg) rational. Ihre Wurzeln bestimmen zu dem Gitter G_α die Multiplicatoren der zugehörigen $p+1$ transformirten Gitter. Denken wir uns die Werthe der Discriminante Δ, welche zu den ursprünglichen h Gittern gehören, gegeben, so sind wiederum zwei von den $p+1$ Wurzeln der Multiplicatorgleichung bekannt, nämlich die Multiplicatoren der Idealgitter. In der That werden die Discriminanten der Idealgitter

$$\Delta' = \Delta(\pi\omega_1^{(\alpha-\beta)}, \pi\omega_2^{(\alpha-\beta)}) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{12} \Delta^{(\alpha-\beta)}$$

bezw.

$$\Delta' = \Delta(\bar{\pi}\omega_1^{(\alpha+\beta)}, \bar{\pi}\omega_2^{(\alpha+\beta)}) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{12} \Delta^{(\alpha+\beta)},$$

mithin die zugehörigen Multiplicatoren:

$$M = \bar{\pi}\sqrt[12]{\frac{\Delta^{(\alpha-\beta)}}{\Delta^{(\alpha)}}} \quad \text{bez.} \quad M = \pi\sqrt[12]{\frac{\Delta^{(\alpha+\beta)}}{\Delta^{(\alpha)}}}.$$

Diese von vornherein bekannten Grössen müssen sich unter den Wurzeln der Multiplicatorgleichung vorfinden. Allerdings bleibt hierbei noch unbestimmt und muss durch besondere Betrachtungen festgestellt werden, welcher von den zwölf Werthen von Θ, die in den vorstehenden Ausdrücken enthalten sind, der Multiplicatorgleichung genügt. Hierüber entscheiden die von Hurwitz gegebenen Entwickelungen.

§. VII. 96. Die vorhergehenden allgemeinen Resultate sollen nun specialisirt werden.

Wir halten zunächst daran fest, dass p in zwei verschiedene Primfactoren π und $\bar{\pi}$ zerfällt, setzen aber voraus, dass diese in ein und demselben Gitter, d. i. in einem <u>Ausnahmsgitter</u> liegen. Dann ist also $G_\beta = G_{-\beta}$ und $G_{\alpha-\beta} = G_{\alpha+\beta}$. Die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Transformationsgleichung werden in diesem Falle iden-

tisch; es ist $J_{\alpha-\beta} = J_{\alpha+\beta}$. Unsere Gleichung $F(J, J_2) = 0$ erhält also eine Doppelwurzel, falls die beiden Factoren von p einem Anceps gitter angehören.

Was die Multiplicatorgleichung betrifft, so wird hier $\Delta_{\alpha+\beta} = \Delta_{\alpha-\beta}$. Die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Multiplicatorgleichung werden also in dem vorausgesetzten Specialfalle:

$$M = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha\pm\beta}}{\Delta_\alpha}} \quad \text{bez.} \quad M = \bar{\pi} \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha\pm\beta}}{\Delta_\alpha}}.$$

Wir wollen eine weitere vereinfachende Annahme hinzufügen. Die beiden (verschiedenen) Factoren π und $\bar{\pi}$ sollen nicht einem Anceps gitter schlechtweg, sondern speciell dem Hauptgitter angehören. Die Transformationsgleichung besitzt dann wie vorher eine Doppelwurzel; diese Doppelwurzel ist aber speciell gleich der Invariante des ursprünglichen Gitters

G_2.

Wir haben

$$J' = J_{\alpha-\beta} = J_{\alpha+\beta} = J_\alpha .$$

Gleichzeitig werden die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Multiplicatorgleichung direct. gleich

$$\pi \qquad \text{und} \qquad \bar{\pi}$$

(ev. bis auf hinzutretende 12te 8 Einheitswurzeln).

Nachdem wir so den allgemeinen Fall behandelt haben, wo p in das Product zweier ungleicher Primfactoren zerfällt, mögen wir noch ein paar Worte über den besonderen Fall sagen, wo p gleich dem Quadrate eines sich selbst conjugirten Primfactors.

$$p = \pi^2$$

wird. Jetzt giebt es unter den durch Transformation p^{ter} Ordnung aus G_2 entstehenden Gittern nur ein Eidealgitter. Daher ist von den

$p+1$ Wurzeln der Transformationsgleichung nur eine bekannt, nämlich

$$J' = J\alpha \pm \beta;$$

ebenso ist von den $p+1$ Werten des Multiplicators nur einer von vornherein angebbar, nämlich

$$M = \pi \sqrt{\frac{\Delta\alpha \pm \beta}{\Delta\alpha}}$$

Das Gitter G_β, welchem die Zahl π angehört, ist in diesem Falle (vergl. pag. 216) es ipso ein Anceps-gitter. Setzen wir dieses noch speciell als das Hauptgitter voraus, so ergeben sich ähnliche Vereinfachungen wie oben.

Hieran schliesst sich leicht die Verallgemeinerung auf einen beliebigen Transformationsgrad. Sei der Transformationsgrad etwa

$$n = p^a q^b \ldots$$

Wir zerlegen die Zahl n in ihre Primfactoren $\pi, \bar{\pi}, k, \bar{k}$ etc. und

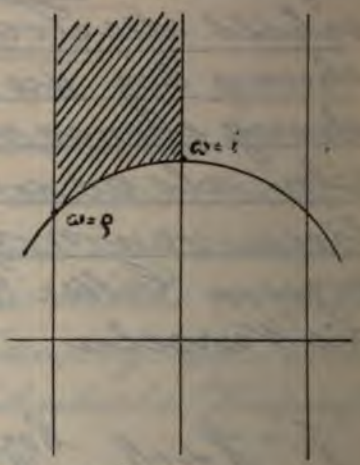
fassen diese auf alle Weisen in das Product zweier conjugirter Zahlen $n = r \cdot \bar{r}$ zusammen, je der Factor r von n bestimmt nun ein Idealgitter, welches dem Gitter G_α durch Transformation n^{ter} Ordnung eingelagert ist. Dementsprechend erhält die Transformationsgleichung bez. die Multiplicatorgleichung ebenso viele bekannte Wurzeln, als es unterschiedene Factoren von n giebt. Gehört etwa r zum Gitter G_β, so sind dieses die Wurzeln

$$J' = J_{\alpha+\beta} \quad \text{bez.} \quad M = r \sqrt[n]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha}}$$

Die Fruchtbarkeit dieser allgemeinen Sätze möge zunächst an einem speciellen Beispiele dargethan werden.

Unter allen Discriminantenwerthen sind die einfachsten $d = -3$ und $d = -4$.

Sie sind dadurch ausgezeichnet, dass sie nur eine Klasse liefern. In unserer Dreiecksfigur entsprechen diesen Werthen die Eckpunkte $w = \varrho$ und $w = i$. [Es liegt nahe, auch die dritte Ecke des Fundamentaldreiecks heranzuziehen. Diese liegt allerdings auf der Begrenzung der v-Halbebene und entspricht daher einer zerfallenden Form von der Discriminante $d = 0$. Von den beiden Perioden w_1 und w_2 wird dann die eine unendlich gross. In Folge dessen artet unser parallelogrammatisches Gitter in ein Closes Streifensystem aus. Wir kämen so von dem Fundamentalbereich der doppelt-periodischen Functionen zu dem der Exponentialfunction



und von der Theorie der singulären Moduln zu der Kreistheilungs-theorie.

Es wäre ausserordentlich interessant, die Theorie der Kreistheilungsgleichungen unter diesem Gesichtspunkte als Grenzfall der Gleichungen der Transformationstheorie zu behandeln.)

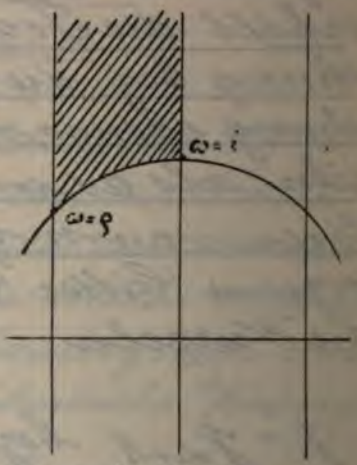
Hier beschränken wir uns auf den Fall $d = -3$. In diesem Falle ist $g_2 = 0$ und daher auch $j = 0$. Wir untersuchen also die Transformation desjenigen speciellen elliptischen Gebildes, für welches $j\alpha = 0$ ist. Es giebt für $d = -3$ nur dieses eine elliptische Gebilde, h ist also $= 1$.

Das besondere Interesse dieses Gebildes liegt in der relativ grossen Anzahl der Einheiten. Für $d = -3$ giebt es die folgenden sechs Einheiten

$$\pm 1, \pm \varsigma, \pm \varsigma^2,$$

wo

Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß sie nur eine Klasse liefern. In unserer Dreiecksfigur entsprechen diesen Werthen die Eckpunkte $w = \varrho$ und $w = i$. [Es liegt nahe, auch die dritte Ecke des Fundamentaldreiecks heranzuziehen. Diese liegt allerdings auf der Begrenzung der v-Halbebene und entspricht daher einer zerfallenden Form von der Discriminante $d = 0$. Von den beiden Perioden w_1 und w_2 wird dann die eine unendlich gross. In Folge dessen artet unser parallelogrammatisches Gitter in ein Closes Streifensystem aus. Wir kämen so von dem Fundamentalbereich der doppeltperiodischen Functionen zu dem der Exponentialfunction



und von der Theorie der singulären Moduln zu der Kreistheilungstheorie.

Es wäre ausserordentlich interessant, die Theorie der Kreistheilungsgleichungen unter diesem Gesichtspunkte als Grenzfall der Gleichungen der Transformationstheorie zu behandeln.)

Hier beschränken wir uns auf den Fall $d = -3$. In diesem Falle ist $g_2 = 0$ und daher auch $j = 0$. Wir untersuchen also die Transformation desjenigen speciellen elliptischen Gebildes, für welches $j_\alpha = 0$ ist. Es giebt für $d = -3$ nur dieses eine elliptische Gebilde, h ist also $= 1$.

Das besondere Interesse dieses Gebildes liegt in der relativ grossen Anzahl der Einheiten. Für $d = -3$ giebt es die folgenden sechs Einheiten

$$\pm 1, \pm \varsigma, \pm \varsigma^2,$$

wo

$$\varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \varrho' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

ist. Die Existenz der Einheiten kommt darin zum Ausdrucke, daß das Gitter ein gleichseitiges ist, daß es also bei einer Drehung um 60° mit sich zur Deckung kommt.

Wir haben nun die diesem Gitter eingelagerten Gitter zu betrachten. Die letzteren zerfallen in zwei Kategorien, je nachdem dieselben bei einer Drehung um 60° mit sich zur Deckung kommen, oder nicht. Im ersten Falle sind die ihrerseits gleichseitige Gitter, also dem ursprünglichen ähnlich. Nun entstehen aber die dem ursprünglich ähnlichen Gitter aus jenem durch gleichzeitige Multiplication der Perioden mit einer Gitterzahl. Diese Gitter sind daher keine anderen als unsere Idealgitter. Was die andere

Kategorie der eingelagerten Gitter betrifft, so muß es zu jedem von ihnen zwei andere Gitter geben, in welche dasselbe successive bei der Drehung um 60° übergeführt wird. Die Gitter der zweiten Kategorie gehören also zu dreien zusammen und gehen bei den Automorphien des Ausgangsgitters cyklisch in einander über.

Hiernach können wir sofort ein eigentümliches Verhalten der Transformationsgleichung vorhersehen. Setzen wir nämlich in $F(J, j) = 0$ die Invariante j gleich Null, so werden sich je nach der Zerlegbarkeit der Zahl p im Körper $\sqrt{-3}$ keine eine oder zwei Wurzeln, $J' = 0$ abspalten. Die übrigen Wurzeln aber müssen zu dreien einander gleich werden. Nur die erstere Thatsache gehört eigentlich in die Theorie der complexen Multiplication; die

letztere folgt ihrerseits aus der Existenz der Einheiten. Unser Resultat folgt übrigens auch aus der Gestalt des zum Transformationsgrade p gehörigen Fundamentalpolygons; vergl. oben pag. ?

Wir behandeln der Reihe nach die Primzahlen

$$p = 2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

Von diesen ist (nach pag. 219) 2, 5 und 11 unzerlegbar; die Zahl 3 geht in den Discriminante auf und wird daher gleich dem Quadrate eines Primfactors, multiplicirt mit einer Einheit:

$$3 = -(\varepsilon - \varepsilon^2)^2.$$

Die Zahlen 7 und 13 sind zerlegbar; u. zw. bekommen wir aus einer Zerlegung noch zwei andere (im Wesentlichen allerdings identische) Zerlegungen durch Multiplication mit den (nicht trivialen) Einheiten ε und ε^2. So ergiebt sich:

$7 = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = \frac{1-3\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{1+3\sqrt{-3}}{2} = \frac{5+\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{5-\sqrt{-3}}{2}$

und

$13 = (1+2\sqrt{-3})(1-2\sqrt{-3}) = \frac{7+\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{7-\sqrt{-3}}{2} = \frac{5+3\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{5-3\sqrt{-3}}{2}$

(Dass wir die beiden Factoren immer noch simultan im Vorzeichen ändern können, entspricht der „trivialen" Einheit – 1.)

Um die zugehörigen Transformationsgleichungen aufzustellen, benutzen wir am besten ein Verfahren, welches in Math. Ann. Bd. 14 pg. 143 angegeben ist. Schliessen wir den Fall $p = 11$ aus, der uns wegen der Unzerlegbarkeit der Zahl 11 ohnehin nicht interessirt, so wird in allen übrigen Fällen die Transformationsgleichung vom Geschlechte Null, wie man aus der Betrachtung der Transformationspolygone in der w-Ebene folgern kann. Alsdann können wir J und J' als rationale Functionen eines geeigneten Parameters τ bestimmen, der auf dem Polygon jeden Werth nur einmal annimmt;

oder auch, wir können J als rationale Function von τ, J' als rationale Function eines zweiten Parameters τ' bestimmen und zwischen τ und τ' eine lineare Abhängigkeit festsetzen. An der genannten Stelle wird nun gemacht:

$$\left.\begin{aligned} J : J-1 : 1 &= \varphi(\tau) : \chi(\tau) : \psi(\tau) \\ J : J'-1 : 1 &= \varphi(\tau) : \chi(\tau') : \psi(\tau') \end{aligned}\right\} \tau\tau' = \text{const.}$$

Hier sind φ, χ, ψ rationale Functionen $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades. Die vorstehenden Gleichungen vertreten mit Vortheil die Transformationsgleichung $F(J, J') = 0$, (sobald wir noch für J $\frac{t}{1728}$ einsetzen.)

Im Falle der Discriminante $d = -3$ wird nun noch, wie erwähnt, $j = 0$. Dies giebt zur Bestimmung von τ die Gleichung $\varphi(\tau) = 0$. Der correspondirende Werth von τ' folgt dann aus $\tau\tau' = \text{const}$ und der Werth der

transformirten Invariante j' aus der Gleichung $J' = \frac{\varphi(\tau')}{\psi(\tau')}$.

Im Folgenden stellen wir die Gleichung $\varphi(\tau) = 0$ für die Transformationsgrade 2, 3, 5 etc. zusammen und geben gleichzeitig den Zusammenhang der Grösse τ mit dem Multiplicator, wie es ebenfalls in Bd. XII aufgestellt wurde.

$\underline{n = 2}$. Die Gleichung für τ lautet:

$$(4\tau - 1)^3 = 0.$$

Da 2 unzerlegbar, kommt die Idealtheorie bei dieser Transformation nicht weiter zur Geltung. Wohl aber sehen wir, dass die drei transformirten Gitter unter einander congruent werden. Der Uebergang zu τ wird vermittelt durch

$$\tau\tau' = 1,$$

der Uebergang zu 16 durch

$$\tau = -\frac{1}{64}\,16^{12}.$$

$\underline{n = 3}$. In diesem Falle geht der Transformationsgrad in der Discriminante auf; es spaltet sich

daher eine Wurzel der Gleichung $\varphi(\tau) = 0$ ab; die drei übrigen werden einander gleich. Wir haben in der That

$$\varphi(\tau) = (\tau - 1)(g\tau - 1)^3 = 0, \quad \tau\tau' = 1.$$

Aus der Wurzel $\tau = 1$ ergiebt sich $\tau' = 1$ und $\varphi(\tau') = 0$ d. h. $j' = 0$. Dieses besondere transformirte Gitter ist also dem ursprünglichen ähnlich. Zwischen τ und M besteht die Gleichung $\tau = \frac{M^6}{27}$; zur Wurzel $\tau = 1$ gehört also der Multiplicator $M^6 = 27$. Nach der allgemeinen Theorie (vergl. pag. 235) wird der Multiplicator in unserem Falle bis auf eine zwölfte Einheitswurzel gleich dem Primfactor von 3, d. h. gleich $\sqrt{-3}$. Hiermit stimmt der soeben angegebene Werth $M^6 = 27$.

<u>$n = 5$.</u> Da 6 unzerlegbar, ist über diesen Fall nur wenig zu bemerken. Die Gleichung 6ten Grades $\varphi(\tau) = 0$ muss zweimal drei gleiche Wurzeln haben. Sie lautet:

$$(\tau^2 - 10\tau + 5)^3 = 0,$$

ferner wird

$$\tau\tau' = 125, \quad \tau = -16^3.$$

$\underline{n = 7}$. Da 7 unzerlegbar ist und zwar in zwei ungleiche Primfactoren, giebt es zwei singuläre Wurzeln der Gleichung $\mathcal{C}(\tau) = 0$ und im Übrigen zweimal drei gleiche. Unsere Gleichung lautet in der That

$$(t^2 + 13\tau + 49)(\tau^2 + 5\tau + 1)^3 = 0$$

mit

$$\tau\tau' = 49 \text{ und } \tau = 16^2.$$

Die beiden singulären Werthe von τ, welche die complexe Multiplication vorhersagt, sind die folgenden

$$\tau^2 + 13\tau + 49 = 0$$

also

$$\tau = -\frac{13 \pm \sqrt{-27}}{2},$$

die zugehörigen Werthe von τ' lauten dann offenbar

$$\tau' = -\frac{13 \mp \sqrt{-27}}{2}.$$

Wir haben daher, wie es sein muß, $\mathcal{C}(\tau') = 0$ und $j' = 0$.

Von dem Werthe des Multiplicators wissen wir aus der allgemeinen Theorie, daß er gleich einem der Primfactoren π der Zahl 7 sein muss, d. h. gleich einer der 6 Zahlen

$$2 \pm \sqrt{-3}, \quad \frac{1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

In der That haben wir nach den vorstehenden Angaben

$$\tau = \left(\frac{1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = 16^2.$$

$\underline{n = 11.}$ Auf den Fall $n = 11$ findet weder die allgemeine Theorie der complexen Multiplication noch der besondere rechnerische Ansatz Anwendung.

$\underline{n = 13.}$ Wieder giebt es zwei singuläre Wurzeln in der Gleichung

$$\zeta^{(\tau)} \cdot (\tau^2 + 5\tau + 13)(\tau^4 + 7\tau^3 + 20\tau^2 + 19\tau + 1)^3 = 0.$$

Es sind dieses die Werthe

$$\tau = \frac{-5 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

Ferner haben wir

$\tau\tau' = 13, \quad \tau = 16.$

Hieraus ergiebt sich:

$$\tau' = \frac{-5 \mp \sqrt{-27}}{2}$$

und $\varphi(\tau') = 0$, wie es sein muss. Auch die Werthe des Multiplicators stimmen mit der allgemeinen Theorie, da sie gleich geeigneten Primtheilern von 13 werden:

$$16 = -\frac{5 \pm \sqrt{-27}}{2}.$$

In der Hurwitz'schen Dissertation ist die Discriminante -3 für alle möglichen Transformationsgrade durchdiscutirt. Es ergiebt sich dabei der allgemeine Satz (in Uebereinstimmung mit pg 235):

Jedem Factor r des Transformationsgrades n entspricht eine Wurzel der Multiplicatorgleichung, welche gerade gleich r ist. Die übrigen Wurzeln der Multiplicatorgleichung sind dreifach.

Hurwitz giebt die entsprechenden

gen im Auge h

Näheres über di
Invarianten j
gebenen Werthe
fahren.

Wir werden
Linie auf die In
chung F(J', J'
ter Linie auch
catorgleichung

Wir fragen uns
wann in der Tra
chung F(J', J') =
Transformations
den kann. Wir

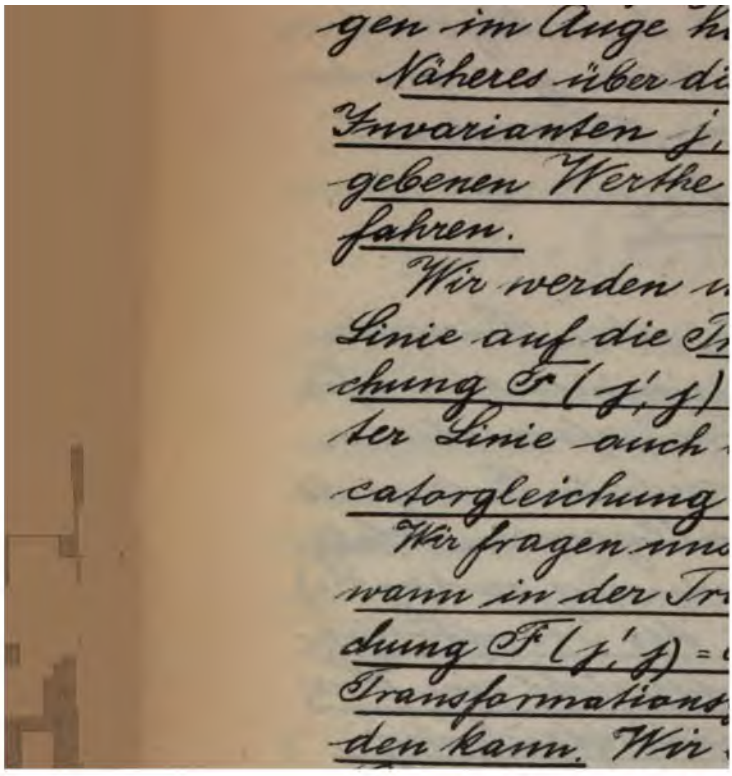
wickelungen, nur daß Kronecker nicht das j, sondern das k' oder auch $k^2(1-k^2)$ etc. als fundamentalen Modul benutzt.

Zunächst erkennt man leicht, daß unsere Gleichung lauter singuläre Invarianten j definirt.

Sei nämlich w der zu dem Werthe j gehörige Periodenquotient, welcher bis auf Transformationen erster Ordnung bestimmt ist. Durch Transformation n^{ter} Ordnung entstehe aus w der Werth

$$w' = \frac{aw+b}{cw+d}, \quad ad-bc=n.$$

Soll nun $j' = j(w')$ mit $j = j(w)$ zusammenfallen, so muß w' mit w aequivalent sein. Wir können in der letzten Gleichung direkt $w' = w$ setzen, indem wir die Transformation erster Ordnung, durch welche w' aus w erhalten wird, auf die rechte Seite der Gleichung werfen und die Bedeutung der



gen im Auge h
Näheres über di
Invarianten f.
gebenen Werthe
fahren.
Wir werden
Linie auf die In
chung F(f', f)
ter Linie auch
catorgleichung
Wir fragen uns
wann in der Tr
chung F(f', f) =
Transformations
den kann. Wir

wickelungen, nur dass Kronecker nicht das j, sondern das k' oder auch $k^2(1-k^2)$ etc. als fundamentalen Modul benutzt.

Zunächst erkennt man leicht, dass unsere Gleichung lauter singuläre Invarianten j definirt.

Sei nämlich w der zu dem Werthe j gehörige Periodenquotient, welcher bis auf Transformationen erster Ordnung bestimmt ist. Durch Transformation n^{ter} Ordnung entstehe aus w der Werth

$$w' = \frac{aw+b}{cw+d}, \quad ad-bc=n.$$

Soll nun $j' = j(w')$ mit $j = j(w)$ zusammenfallen, so muss w' mit w aequivalent sein. Wir können in der letzten Gleichung direkt $w' = w$ setzen, indem wir die Transformation erster Ordnung, durch welche w' aus w erhalten wird, auf die rechte Seite der Gleichung werfen und die Bedeutung der

Die zugehörigen
daher sicher singu
Wir haben bereit
kennen gelernt, i
J' der Transform
$F(J'J) = 0$ specie
Dieses trat dann e
formationsgrad p
π und $\bar{\pi}$ zerfällt
zu der Discrimin
gen Hauptgitter l
Satze von pag. 230 e
dass auch das Um
ist. Soll nämlich
gleich einer Invari
che zu derselben D

$j_\alpha + \beta$ haben. Soll nun speciell $j' = j_\alpha$ werden, so muss G_p das Hauptgitter werden, p also durch die zu $-\nabla$ gehörige Hauptform darstellbar sein. Uebertragen wir dieses Resultat von dem Primzahlgrade p auf einen beliebigen Grad n, so werden wir den Satz aufstellen:

Soll in der Transformationsgleichung $j' = j$ werden, so muss der Transformationsgrad n durch die Hauptform derjenigen Discriminante $-\nabla$ darstellbar sein, welche zu j gehört. Es wird in unserer Gleichung soviele Wurzeln $j' = j$ geben als verschiedene Zerlegungen $n = \nu\nu'$ in dem betr. Hauptgitter möglich sind.

Der vorstehende Satz lässt sich auch ganz direkt beweisen. Soll j der Gleichung $F(j, j) = 0$ genügen, so muss nach dem oben Gesagten ein zu j gehöriger Werth w eine Relation:

$$w = \frac{aw + b}{cw + d}, \quad ad - bc = n$$

befriedigen.

Schreiben wir dieselbe in Form einer quadratischen Gleichung:

$$c w^2 + (d-a) w + b = 0,$$

so werden im allgemeinen c, $d-a$, b einen gemeinsamen Theiler haben, nach dessen Fortschaffung die Gleichung lauten möge:

$$\mathfrak{P} w^2 + \mathfrak{Q} w + \mathfrak{R} = 0,$$

so dafs wir haben

$$c = \mathfrak{P} u \quad d-a = \mathfrak{Q} u \quad -b = \mathfrak{R} u$$

Setzen wir noch $a+d = t$, so können wir die vier Coefficienten a, b, c, d durch die Coefficienten unserer quadratischen Gleichung und t ausdrücken:

$$a = \frac{t - \mathfrak{Q} u}{2}, \quad b = -\mathfrak{R} u, \quad c = \mathfrak{P} u, \quad d = \frac{t + \mathfrak{Q} u}{2}.$$

Nun mufs aber $ad - bc = n$ sein oder, wenn wir die Discriminante von $\mathfrak{P} w^2 + \mathfrak{Q} w + \mathfrak{R} = 0$ mit $-\nabla$ bezeichnen

zeichnen:

$$\frac{t^2 + \nabla u^2}{4} = n.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber leicht, wie eine kleine Umrechnung zeigt, daß n durch die zu $-\nabla$ gehörige Hauptform darstellbar ist und zwar einerlei, ob ∇ durch 4 theilbar ist oder nicht.

Umgekehrt erkennt man, daß jede Lösung unserer Gleichung eine Transformation n^{ter} Ordnung bestimmt, welche die Invariante j in sich verwandelt. Diese Aussage deckt sich aber mit dem zweiten Theile unseres Satzes.

Allerdings werden die so erhaltenen Transformationen n^{ter} Ordnung, wenn n einen quadratischen Teiler τ^2 enthält, zum Theil uneigentliche Transformationen sein können. Haben wir nämlich ein Lösungssystem t, u mit dem gemeinschaftlichen Theiler τ, so tritt derselbe Theiler auch in a, b, c, d auf. Da wir aber bei der Auf-

stellung der Transformationsgleichung $F(y'-y)=0$ nur eigentliche Transformationen berücksichtigt haben, so sind die entsprechenden Werthe von y als Wurzeln unserer Gleichung nicht mitzuzählen.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Anzahl der Wurzeln von $F(yy)=0$ zu bestimmen. Zu dem Zwecke suchen wir uns die Anzahl der inaequivalenten w, zu denen unsere y gehören. An sich gehören natürlich zu jedem y unendlich viele w; von diesen können wir aber jedesmal ein reducirtes w isoliren. Aus der Anzahl dieser reducirten w wird dann die Anzahl der gesuchten y leicht folgen.

Wir haben also jetzt alle Gitter aufzusuchen, zu denen quadratische Formen $(c, d-a, b)$ gehören, deren Coefficienten die Relation $ad-bc=n$ zu befriedigen gestatten. Zu diesem Zwecke untersuchen wir zuvör-

derst. welche Werthe die Discriminanten unserer Gitter annehmen können. Wir haben dieselben bisher mit $-\nabla\varkappa^2$ bezeichnet, wollen jetzt aber einfach $(-\nabla)$ dafür schreiben, indem wir $\varkappa = 1$ setzen, was zu keinen Irrthümern Anlass geben wird. Natürlich können jetzt die Zahlen P, Q, R auch einen gemeinsamen Theiler haben.

Der Werth ∇ muss dann, wie gezeigt ist, so gewählt werden, dass

$$n = \frac{t^2 + \nabla}{4}$$

gemacht werden kann, d. h. es muss sein:

$$\nabla = 4n - t^2$$

Da ∇ positiv sein muss, können wir hier für t setzen:

$$t = 0, \pm 1 \pm 2 \ldots \pm \mathfrak{E}(2\sqrt{n}).$$

Die sämmtlichen Discriminantenwerthe, zu denen unsere gesuchten Gitter gehören, sind also:

$4n, 4n-1, 4n-4, \ldots \quad 4n-[\mathfrak{E}(2\sqrt{n})]^2.$

Zu jedem Werthe von $-\nabla$ gehören nun eine Anzahl reducirter Formen (P, Q, R') [dem nur diese brauchen wir zu beachten, da wir ja nach Gittern und nicht nach Formen fragen], die uns mit Hülfe der Grösse t ein System von Coefficienten a, b, c, d zu berechnen gestatten. Wir haben nämlich:

$$a = \frac{t-Q}{2} \qquad b = -R' \qquad c = P' \qquad d = \frac{t+Q}{2}$$

Jede reducirte Form liefert also, je nachdem $t = 0$ oder $|t| > 0$ ist, ein oder 2 Coefficientensysteme. Dementsprechend hat die Gleichung $F(x(w), y(w)) = 0$ eine einfache Wurzel im Falle $t = 0$, eine doppelte im Falle $|t| > 0$.

Hierbei ist abermals zu bemerken, dass sich die Gleichung $F(x, y) = 0$ nur auf eigentliche Transformationen bezieht. Wir müssen daher unterscheiden zwischen solchen Wer-

then von t, für welche die Coefficienten

$$\frac{t-Q}{2}, \; -R', \; P', \; \frac{t+Q}{2}$$

theilerfremd und zwischen solchen für welche sie theilerhaltig sind.

Wir können jetzt direkt die Anzahl der Wurzeln unserer Gleichung $F(j,j)=0$ abzählen. Wir bezeichneten früher mit $h(\nabla)$ die Zahl der primitiven, mit $H(\nabla)$ die Zahl aller Klassen quadratischer Formen, welche zur Discriminante $-\nabla$ gehören. Ausserdem führen wir noch die Bezeichnung $H'(\nabla)$ für die Anzahl derjenigen Classen (P, Q, R) der Discriminante $-\nabla$ ein, für welche die Zahlen

$$\frac{t \pm Q}{2}, \; P' \text{ und } R'$$

theilerfremd sind. Alsdann folgt aus der soeben beschriebenen Aufzählung der Verschwindungspunkte von $F(j,j)$ in der ω-Ebene, daß

ihre Anzahl gleich

$$H'(4n) + 2H'(4n-1) + 2H'(4n-4) + \text{etc.} + 2H'(4n - \mathfrak{E}\sqrt{n})$$

oder kürzer geschrieben gleich

$$\sum H'(4n - t^2)$$

wird, wo t die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm 2\mathfrak{E}(\sqrt{n})$ durchläuft.

Unsere Abzählung bezog sich auf den reducirten Raum der w-Ebene. Die vorstehende Formel giebt die Anzahl derjenigen reducirten w, für welche $F(f(w), f(w)) = 0$ ist. Wir wünschen aber vielmehr den in j gemessenen Grad der Gleichung $F(j, f) = 0$ zu kennen, d. h. die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung in der j-Ebene zu bestimmen. Zu diesem Zwecke müssen wir uns die conforme Abbildung des einzelnen w-Dreiecks auf die j-Ebene gegenwärtig halten. Nach Früherem wird im Allgemeinen die Umgebung jeder Stelle w

auf die j-Ebene eindeutig abgebildet. Nur die Punkte $w = i$ bez. $w = \varrho$ liefern eine zweifache bez. eine dreifache Ueberdeckung der zugehörigen Stellen $j = 1728$ bez. $j = 0$. Ein einfacher Nullpunkt $w = i$ bez. $w = \varrho$ ist daher in der j-Ebene mit der Multiplicität $\frac{1}{2}$ bez. $\frac{1}{3}$ zu rechnen. Dem Werthe $j = 1728$ entspricht die quadratische Gleichung $w^2 + 1 = 0$ d. h. die quadratische Form $(P, 0, P)$; andrerseits gehört zu dem Werthe $j = 0$ die quadratische Gleichung $w^2 + w + 1 = 0$, d. h. die Form (P, P, P). Hiernach müssen wir sagen:

Die Anzahl der Wurzeln von $F(w, j) = 0$ in der j-Ebene ist ebenfalls gegeben durch

$$\sum \mathfrak{H}'(4m - t^2),$$

nur haben wir jetzt bei der Auswerthung dieser Summe die Classen $(P', 0, P')$ mit der Hälfte, die Classen (P, P, P) mit dem dritten Theile der zunächst sich

diesen Stellen ausserdem eine Anzahl unverzweigter Blätter verlaufen und dass diese gerade die uns interessirenden Werthepaare (0,0) bez. (1728, 1728) tragen. Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus den Reihenentwickelungen von f und f' in der w-Ebene. Wir haben einerseits für die dem Werthe $f = 0$ benachbarten Werthe die Entwickelung

$$f = c_1 (w-\varrho)^3 + c_2 (w-\varrho)^6 + \ldots .$$

Gleichzeitig erhalten wir durch Transformation n^{ter} Ordnung für f', falls f' mit f zusammenfällt, die folgende Entwickelung

$$f' = c_1' (w-\varrho)^3 + c_2' (w-\varrho)^6 + \ldots .$$

Durch Elimination von w ergiebt sich für f eine nach ganzen Potenzen von f' und ebenso für f' eine nach ganzen Potenzen von f fortschreitende Entwickelung. Dieselbe zeigt, dass dasjenige Blatt der Riemann'schen Fläche, welches die Stelle $f = 0$, $f' = 0$ trägt, an dieser Stelle unverzweigt ist. Das Entsprechende gilt für die Stelle $f = 1728$, $f' = 1728$. Hiernach ist klar, dass sich die

Nullpunkte von der y-Ebene mit ungeänderter Multiplicität auf die Riemann'sche Fläche übertragen.

Hiethin hat die Function $y'-y$ auf unserer Riemann'schen Fläche soviele Nullstellen, als die Gleichung $F(y,y)=0$ in der y-Ebene Wurzeln besitzt, nämlich

$$\sum H'(4n-t^2),$$

wobei für die Berechnung dieser Summe die Bemerkungen von pg. in Kraft bleiben.

Wir schliessen hier einen kleinen Excurs über die sogenannten Kronecker'schen Classenzahlrelationen an, welche interessante Beziehungen zwischen verschiedenen zahlentheoretischen Functionen ergeben.

In unserer Endformeln werden wir wünschen, statt der Klassen-

zahlen H', deren Definition (vergl. pg. 239) eine etwas künstliche war, die Klassenzahlen H, d. h. die Anzahlen aller primitiven oder imprimitiven Classen derselben Discriminante figuriren zu sehen.

Wir erreichen dieses dadurch, dass wir zu der bisherigen Transformationsgleichung $F(J', J) = 0$ (ausführlicher geschrieben: $F_n(J', J) = 0$, da es sich um alle eigentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung handelt) die sämmtlichen Gleichungen

$$F_{\frac{n}{t^2}}(J', J) = 0,$$

wo t die sämmtlichen quadratischen Theiler von n durchläuft, hinzunehmen.

Jede einzelne dieser Gleichungen liefert die <u>eigentlichen Transformationen von der Ordnung $\frac{n}{t^2}$</u> oder wie wir sagen können, die <u>un-</u>

eigentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung mit dem gemeinsamen Factor τ. Alle Werthe von J, welche bei diesen uneigentlichen Transformationen in sich übergehen, werden durch die Gleichung

$$\mathcal{F}_{\frac{n}{\tau^2}}(J, J) = 0$$

erhalten. Hiethin bekommen wir die Gesammtheit aller Werthe J, welche bei den eigentlichen und uneigentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung unverändert bleiben, aus der Gleichung

$$\prod_{(\tau)} \mathcal{F}_{\frac{n}{\tau^2}}(J, J) = 0.$$

Der Grad dieser Gleichung ergiebt sich sofort aus dem Grade von $\mathcal{F}_n(J, J) = 0$. Da der letztere gleich $\sum H'(4n - t^2)$ war, so wird der erstere ersichtlich

gleich

$$\Sigma H(4n - t^2).$$

Wir haben nämlich jetzt einfach die Nichttheilbarkeitsbedingung von pg. 259 unberücksichtigt zu lassen, und dementsprechend H' durch H zu ersetzen.

Diese Formel bedarf einer Ergänzung, wenn n eine reine Quadratzahl ist. In diesem Falle müssen wir jedenfalls festsetzen, daß bei der Bildung unserer Gleichung $\prod_\tau F_{\frac{m}{\tau^2}}(f,f) = 0$ nur solche Zahlen τ benutzt werden, welche kleiner als $(\sqrt{m})$ sind. Wollten wir nämlich $\tau = k_m$ setzen, so würde in unserer Gleichung der Factor

$$F_1(f,f)$$

vorkommen, welcher da f bei beliebigen Transformationen erster Ordnung ungeändert bleibt, identisch verschwinden würde.

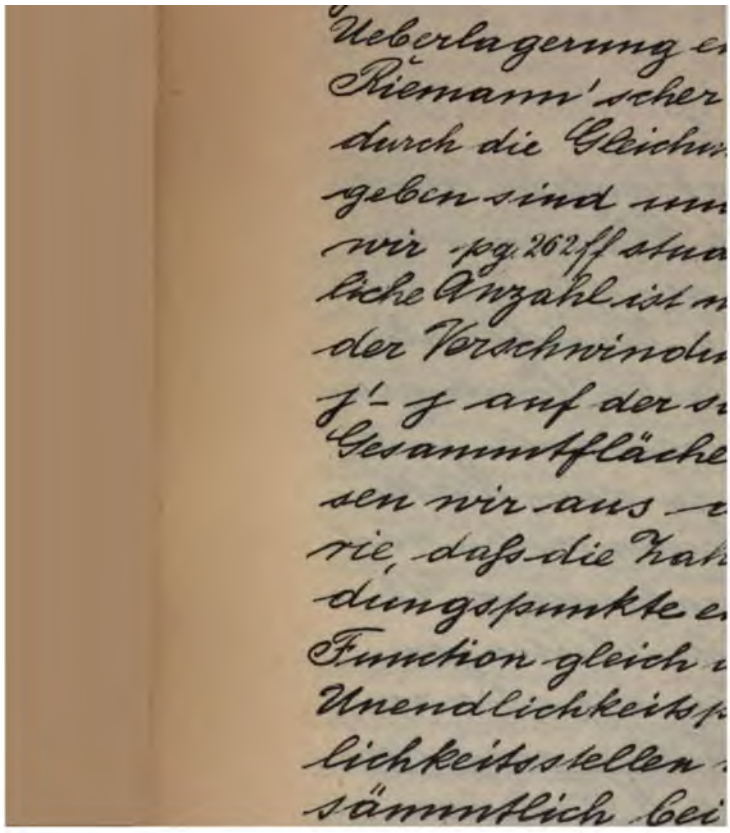
Dementsprechend werden wir auch bei der Berechnung von

$\Sigma H(4n-t^2)$ diejenigen Classen (P, Q, R) nicht mitzählen dürfen, welche bei einer Transformation erster Ordnung ungeändert bleiben. Die Discussion der Pell'schen Gleichung, die jetzt auf die gewöhnliche Form

$$\frac{t^2 + Du^2}{4} = 1$$

zurückkommt, zeigt dass in unserer Summe 3 solche Classen vorkommen, nämlich $u = 1, D = 3, t = \pm 1$ und $u = 1, D = 4, t = 0$. Ersichtlich liefern die beiden ersten Lösungen als zugehörige Invariante $j = 0$, die dritte $j = 1728$; zu dem Werthe ΣH würden die beiden ersten nach unserer früheren Verabredung $2/3$, die dritte $1/2$ Einheiten beitragen. Diesen Betrag haben wir also in Abzug zu bringen. Hiethin wird der Grad der Gleichung $\Pi F = 0$, im Falle n ein vollständiges Quadrat ist, gleich

$$\Sigma H(4n-t^2) - \tfrac{7}{6}.$$


Ueberlagerung e
Riemann'scher
durch die Gleichu
geben sind um
wir pag 262 ff stud
liche Anzahl ist n
der Verschwindu
f' - f auf der s
Gesammtfläche
sen wir aus -
rie, dass die Ver
dungspunkte e
Function gleich
Unendlichkeits
lichkeitsstellen
sämmtlich bei

nach $u = e^{2i\pi\omega}$ fortschreitenden Reihen von f' ablesen. Es ergiebt sich als Resultat, wie wir hier nur historisch anführen:

Die Anzahl der bei $f = \infty$ in den verschiedenen Blättern liegenden Unendlichkeitsstellen beträgt

1. Wenn n keine Quadratzahl ist:

$$\Phi(n) + \Psi(n),$$

2. wenn aber n gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl ist:

$$\Phi(n) + \Psi(n) - 1.$$

Hier verstehen wir unter $\Phi(n)$ die Theilersumme von n, sodaß unter S einen beliebigen Theiler von n verstanden,

$$\Phi(n) = \Sigma S$$

wird. Ferner wird

$$\Psi(n) = \Sigma S' - \Sigma S'',$$

wo S' bez. S'' diejenigen Theiler

merkwürdigen R

1. im Falle eine

$\mathcal{H}(4n) + 2\,\mathcal{H}(4n-1)$

$2\mathcal{H}(4n-t^2) = \Phi(n) + \Psi($

2. im Falle eines q

$\mathcal{H}(4n) + 2\,\mathcal{H}(4n-1) + 2$

$-7/6 = \Phi(n) + \Psi(n) - 1$

Wir bezeichnen

als Classenzahlr

Stufe, im Gegensat

zahlrelationen h

wir später kennen

Die letzteren werd

varianten der hö

lich ableiten wie

stellt; später sind sie insbesondere von Gierster entwickelt worden. Vergl. hierzu die historischen Bemerkungen in Hadulf. II, Abschn. 4, Cap. 5 und 6 pg. 160 ff.

Das Interesse der Klassenzahlrelationen besteht in erster Linie darin, daß sie die complicirte zahlentheoretische Function H mit den elementaren Functionen Φ und Ψ in Beziehung setzt und die erstere aus den letzteren zu berechnen gestattet.

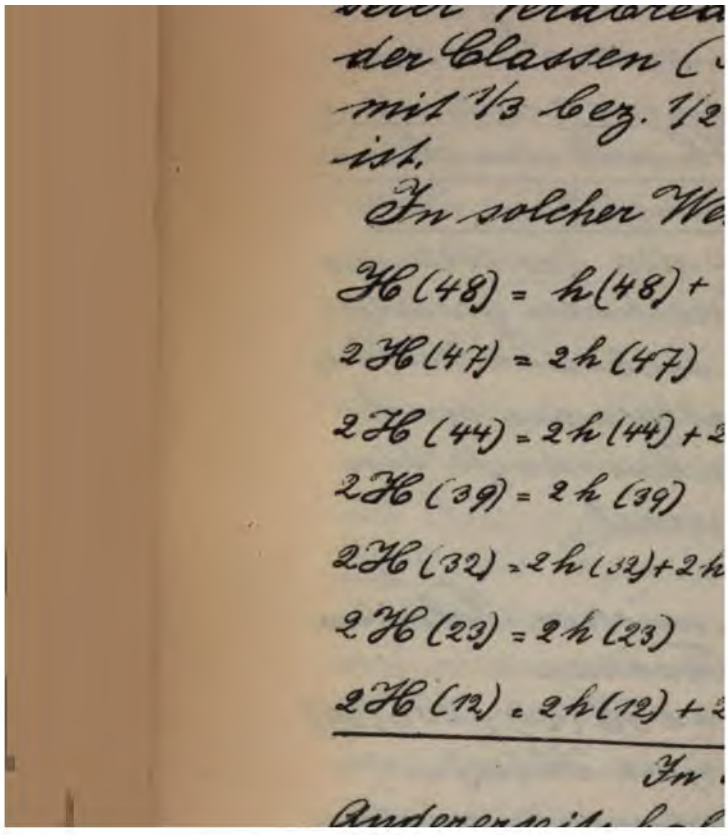
Zu den beiden soeben unterschiedenen Fällen (n allgemein und n quadratisch) geben wir je ein numerisches Beispiel.

1. $n = 12$.

Die linke Seite unserer Relation besteht aus den Termen:

$$H(48) + 2H(47) + 2H(44) + 2H(39) + 2H(32) + 2H(23) + 2H(12).$$

Die Zahlen H reduciren wir zunächst durch Abspalten der quadratischen Theiler auf die Zahlen h. So ergiebt sich z. B.



der Classen (
mit 1/3 bez. 1/2
ist.

In solcher We

$\mathfrak{H}(48) = h(48) +$

$2\mathfrak{H}(47) = 2h(47)$

$2\mathfrak{H}(44) = 2h(44) + 2$

$2\mathfrak{H}(39) = 2h(39)$

$2\mathfrak{H}(32) = 2h(32) + 2h$

$2\mathfrak{H}(23) = 2h(23)$

$2\mathfrak{H}(12) = 2h(12) + 2$

In

2. $n = 16$.

Hier haben wir zunächst zu berechnen

$$H(64) + 2H(63) + 2H(60) + 2H(55) + 2H(48) + 2H(39) + 2H(28) + 2H(15).$$

Aus den Cayley'schen Tabellen ergiebt sich mit Rücksicht auf unsere Verabredungen:

$$H(64) = h(64) + h(16) + h(4) = 2 + 1 + 1/2$$
$$2H(63) = 2h(63) + 2h(7) = 8 + 2$$
$$2H(60) = 2h(60) + 2h(15) = 4 + 4$$
$$2H(55) = 2h(55) = 8$$
$$2H(48) = 2h(48) + 2h(12) + 2h(3) = 4 + 2 + 2/3$$
$$2H(39) = 2h(39) = 8$$
$$2H(28) = 2h(28) + 2h(7) = 2 + 2$$
$$2H(15) = 2h(15) = 4$$

In Summa $52\ 1/6$

Die linke Seite der Klassenzahlrelation beträgt daher wegen des Subtrahenten $7/6 : \underline{51.}$

Andererseits wird

Nach diesem
wir zu der Gle
zurück. Wir hab
zeln dieser Glei
von Kategorien
den zugehörigen
criminante –
Werthe waren

$\nabla = 4n\,,\ 4n -$

Die Wurzeln
gehörigen Kateg
die der übrigen
unserer Gleichu
uns nun die l

in ebenso viele Bestandtheile gespalten denken, als es unterschiedene Kategorien giebt. Wir können etwa schreiben:

$$1)\ \mathfrak{F}(j,j) = X'_{4n}(j)\cdot[X'_{4n-1}(j)]^2 \cdot [X'_{4n-4}(j)]^2 \cdot [\ldots].$$

Der Grad des einzelnen Bestandtheiles in j beträgt nach pg. 259 bez.

$$\mathcal{H}'(4n),\ \mathcal{H}'(4n-1),\ \mathcal{H}'(4n-4), \ldots$$

Neben den Ausdrücken X' führen wir sogleich gewisse ähnlich gebaute Ausdrücke X und χ ein, welche zu $\mathcal{H}$ und h in demselben Verhältniß stehen wie X' zu $\mathcal{H}'$. Es soll nämlich $X_\nabla(j)$, gleich Null gesetzt, alle diejenigen in der Anzahl $\mathcal{H}$ vorhandenen Invarianten primitiver oder imprimitiver Classen liefern, welche zur Discriminante $-\nabla$ gehören. Ebenso soll $\chi_\nabla(j) = 0$ die in der Anzahl h vorhande-

Natürlich ste
dieses im χ_{∇} a
Unser Ziel so
durch Benutzun
schiedenen Wer
gen Gleichungen
jedes ∇ eine Cl
$\chi_{\nabla}(j) = 0$ zu iso
resultat dieser Un
folgendes sein.
ist ebenso wie d
onsgleichung ei
gebraische Gleich
ster Coefficient
kommt.
Zunächst

Factoren fortheben, welche zu den Discriminanten $-\nabla = -3$ und $-\nabla = -4$ gehören, oder zu solchen Discriminanten, die sich von -3 und -4 nur um einen quadratischen Factor unterscheiden. Die entsprechenden Werthe von j sind $j = 0$ und $j = 1728$. Diese Werthe von j machten uns früher bei der Abzählung des Grades der Transformationsgleichung Schwierigkeiten, überdies interessiren sie uns jetzt nicht mehr, insofern wir uns mit der Gleichung $X_\nabla(j) = 0$ beschäftigen wollen. Die in solcher Weise durch Forthebung der Factoren (j) und $(j-1728)$ vereinfachte Gleichung mögen wir etwa die „gereinigte Transformationsgleichung" nennen.

Wir führen nun den Nachweis, daß wir die einzelne Classengleichung $X_\nabla(j)$ stets mittelst rationaler Processe aus unseren gereinigten Transformati-

gen für $\nabla = 4n -$
tional berech
bilden:

$$\mathfrak{F}_{4n}(JJ) = X'_{4n}(J)\,[X_{4n}$$

Hier sind, wie
unserer Annahme
Factoren von $[X$
rational bekan
daher

$$X'_{4n}(J)\,[X$$

durch einfache
nen.
Soll man ist

gehörigen Determinanten, so werden die Anfangsglieder des letzten Produktes offenbar $\chi_{4n}(\chi_{4n-1})^2$. Was noch folgt, sind lauter Factoren χ' für kleinere Determinanten. Da wir diese als rational bekannt angesehen haben, können wir sie einfach fortlassen; es ist somit auch das Produkt $\chi_{4n}(\chi_{4n-1})^2$ rational herstellbar.

Bemerken wir jetzt noch, dass die Gleichung χ_{4n} keine Doppelwurzel besitzt, so ergiebt sich nach bekannten Sätzen der Gleichungstheorie sofort, dass man aus dem Produkt $\chi_{4n}(\chi_{4n-1})^2$ rational die Factoren χ_{4n} und χ_{4n-1} abspalten kann, was wir zeigen wollten.

Um unseren Beweis vollständig zu machen, zeigen wir jetzt noch, dass χ_8 und χ_7 rational berechnet werden können. Bilden wir nämlich $F_2(J, J)$, so ergiebt sich:

$$F_2(J,J) = \chi_8'(J)\,[\chi_7'(J)]^2,$$

indem wir die Determinanten -4, -3 unberücksichtigt lassen. Nun ist weiter:

$$X_8'(j) = X_8(j), \quad X_7'(j) = X_7(j),$$

immer unter der Voraussetzung, daß wir $X_4(j)$ und $X_3(j)$ unterdrücken.

Es folgt also:

$$F_2(J,j) = X_8(j)\,[X_7(j)]^2.$$

Damit ist aber gezeigt, daß $X_8(j)$ und $X_7(j)$ rational berechnet werden können. Uebrigens sind $X_8(j) = 0$ und $X_7(j) = 0$ sogar Gleichungen ersten Grades, also die zugehörigen j rational, da sowohl für $\nabla = 8$ wie für $\nabla = 7$ nur eine Classe existirt.

Wir gewinnen so ganz allgemein das Resultat:

Die Gleichung h^{ten} Grades $X_\nabla(j) = 0$ welche die h zur Discriminante $-\nabla$ gehörigen singulären j bestimmt, ist eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten.

Wir behaupten aber ferner:
Der Coefficient des höchsten Gliedes in dieser Gleichung ist gleich 1.

Der Beweiss lässt sich so führen, dass man zunächst zeigt: Das höchste Glied der Gleichung $F(y,y)=0$ hat zum Coefficienten die Einheit. Dies gelingt in der Weise, dass man sich das Bildungsgesetz der Coefficienten von $F(y,y)$ aus den Reihenentwickelungen von y und y' nach Potenzen von r klar macht. Zunächst erkennt man, solange n kein volles Quadrat ist, dass der höchste Coefficient an sich gleich 1 wird. Ist aber n ein volles Quadrat, so wird der höchste Coefficient zwar gleich $\sqrt{n}$; gleichzeitig nehmen aber auch alle übrigen Coefficienten den Factor $\sqrt{n}$ an, so dass wir nach Forthebung desselben wieder als ersten Coefficienten die Eins übrig behalten. —

Bei der Verlegung der Gl. $F=0$ in die einzelnen Theilgleichungen

$x=0$ geht nun offenbar die Eigenschaft, die Einheit zum höchsten Coefficienten zu haben, auf alle Theilgleichungen über.

Es ist dies hier nicht weiter auszuführen, weil es algebraisch ganz einfach ist.

Wir mögen dieses Resultat so ausdrücken, dass wir sagen:

Die h singulären Werthe von j sind nicht nur algebraische Zahlen schlechtweg, sondern sie sind ganze algebraische Zahlen.-

Das Verfahren, welches wir bei der Aufstellung der Classengleichung befolgten, ist allerdings ein rein theoretisches. Für die numerische Durchführung wäre es sehr unpraktisch, von der Transformationsgleichung des j seinen Ausgang zu nehmen, weil die Gleichung, wie wir sahen, schon für kleine Transformationsgrade ungeheuer complicirt ist. Hier treten die Moduln höherer Stufe in ihr Recht, wie weiter unten

nach näher auszuführen.

Wir theilen die Classengleichung für die allereinfachsten Fälle

$$\nabla = 3, 4, 7, 8$$

im Anschlusse an Weber mit. In den beiden ersten Fällen lautet sie natürlich

$$j = 0 \text{ und } j - 1728 = 0.$$

Auch in den beiden folgenden Fällen ist noch $h = 1$. Man findet hier als Classengleichung:

$$j + 9375 = 0 \text{ bez. } j - 8000 = 0.$$

23. VII. 96. Unsere nächste Aufgabe soll es jetzt sein, die Classengleichung $X_\nabla = 0$ näher zu studiren.

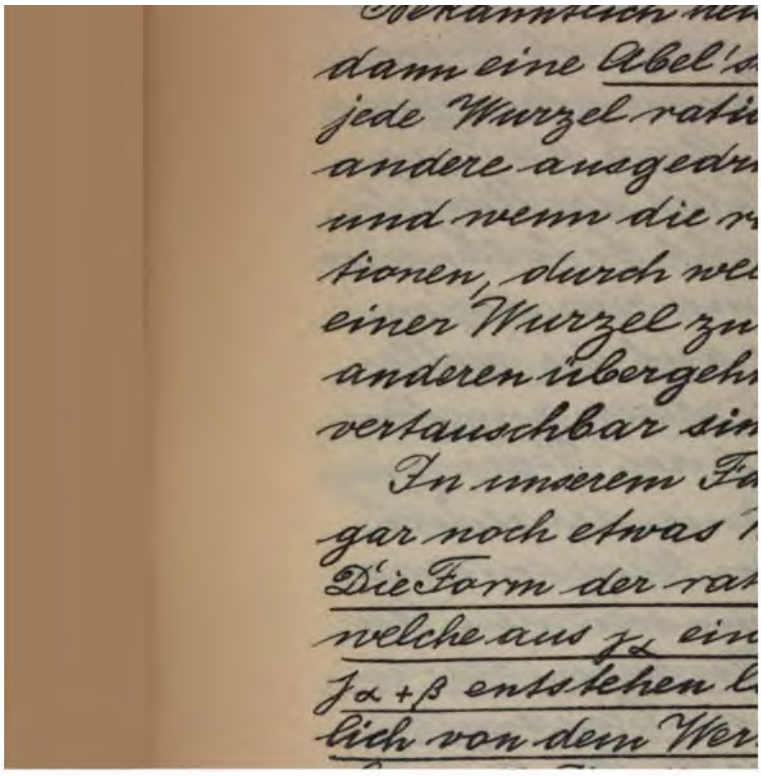
Im Allgemeinen kann man bei der Untersuchung einer algebraischen Gleichung zwei verschiedene Gesichtspunkte verfolgen. Man kann sich entweder die Aufgabe stellen, die Wurzeln der Gleichung zu separiren, sie numerisch mit vorgegebener Genauigkeit zu berechnen;

im Anschlusse hieran wird man die Frage entscheiden, wie viele Wurzeln reell werden etc. Andrerseits kann man die Gleichung daraufhin untersuchen, ob sie durch Wurzelzeichen lösbar ist oder, wenn dieses nicht der Fall ist, welches die einfachsten Irrationalitäten sind, mit deren Hülfe die Gleichung sich reduciren lässt. Die erste Art der Fragestellung bezeichnet man wohl als die numerische, die zweite als die algebraische Auflösung der Gleichungen.

Was die erstere Art der Untersuchung betrifft, so ist dieselbe bei unserer Classengleichung eigentlich schon implicite erledigt. Indem wir die zu der vorgelegten Discriminante $-\nabla$ gehörigen reducirten Formen $p\omega^2 + q\omega + r$ aufzählen, bekommen wir durch Nullsetzen derselben eine Anzahl von Punkten ω in dem reducirten

Dreiecke der Modultheilung. Die Trennung der Wurzeln unserer Gleichung ist damit geleistet. Von den Werthen w kommen wir mittelst der bekannten Potenzentwickelungen zu den zugehörigen Werthen von f. Diese lassen sich hiernach mit beliebiger Genauigkeit numerisch berechnen. Auch die Frage nach der Realität der Wurzeln erledigt sich leicht. Es fallen nämlich diejenigen und nur diejenigen Werthe von f auf die reelle Axe der f-Ebene, deren zugehörige w-Werthe auf der Begrenzung bez. der Mittellinie des reducirten Dreiecks liegen. Diese entsprechen bekanntermassen den Anceps-Formen. Wir haben also unter den Wurzeln der Classengleichung soviel reelle Werthe, als es Anceps-classen der Discriminante $-\nabla$ giebt.

Gehen wir nun zu der zweiten Art der Betrachtung über. Wir



Dieser Umstand lässt einen interessanten Schluss auf die Gruppe unserer Gleichung zu. Dieselbe ist natürlich erstens eine Abel'sche Gruppe, d.h. eine Gruppe vertauschbarer Operationen. Zweitens aber erkennen wir, dass sie mit der Gruppe der Composition genau parallel läuft (ihr „isomorph" ist). Der Uebergang von f_α zu $f_{\alpha+\beta}$ wird nämlich in der Gitterspräche dadurch bewerkstelligt, dass wir das Gitter G_α mit dem Gitter G_β multipliciren, wobei sich das Gitter $G_{\alpha+\beta}$ ergiebt. Die Multiplication mit G_β hat also auf die Wurzeln f_α der Classengleichung denselben Einfluss, wie die rationale Operation R_β. In beiden Fällen besteht die charakteristische Eigenschaft, dass sich die Indices α und β einfach additiv an einander reihen. Wir kommen also zu dem merkwürdigen Ergebniss:

Die ursprünglich zahlentheoretisch definirte Gruppe der Composition gewinnt bei der Classengleichung eine algebraische Bedeutung.

Um die vorstehenden Behauptungen zu beweisen, haben wir nur die Richtigkeit der Gleichung

$$J_{\alpha+\beta} = R'_{\beta}(J_{\alpha})$$

darzuthun. Ist nämlich gezeigt, daß jede Wurzel in solcher Weise durch eine rationale Operation aus jeder anderen erhalten werden kann, so ergiebt sich die Vertauschbarkeit dieser rationalen Operationen von selbst. In der That wird dann

$$R'_{\gamma}(R_{\beta}(J_{\alpha})) = J_{(\alpha+\beta)+\gamma} = J_{(\alpha+\gamma)+\beta} = R'_{\beta}(R_{\gamma}(J_{\alpha})).$$

Wir stützen uns beim Beweise in erster Linie wieder auf die Transformationsgleichung. Während wir aber bisher solche Transformationsgrade n heranzogen, welche sich im Hauptgitter zerlegen

liessen, benutzen wir jetzt Transformationsgrade, welche in das Produkt zweier im Nebengitter G_β bez. $G_{-\beta}$ befindlicher Zahlen ν und $\bar{\nu}$ zerfallen. Hinsichtlich der Wurzeln unserer Transformationsgleichung ergiebt sich daraus folgende Umänderung der Fragestellung. Wir haben früher nach denjenigen Werthen j' gefragt, welche mit j_α identisch sind, entsprechend der Annahme, dass n in zwei Hauptzahlen zerlegt werden kann und mit Rücksicht darauf, dass bei der Multiplication mit einer Hauptzahl das zu dem Werthe von j_α gehörige Gitter ungeändert bleibt. Wir werden jetzt nach denjenigen Werthen j' fragen, welche nicht direkt gleich j_α sondern gleich $j_\alpha \pm \beta$ sind; da nämlich die Zahlen ν und $\bar{\nu}$ den Nebengittern G_β und $G_{-\beta}$ angehören sollen, wird sich das Gitter G_α bei der complexen Multiplication mit ν und $\bar{\nu}$ je

in ein Gitter verwandeln, welches in das Gitter $G_{\alpha+\beta}$ bez. $G_{\alpha-\beta}$ eingelagert ist, so dass j_α in $j_{\alpha+\beta}$ übergeht.

Übrigens werden wir beim Beweise nur Primzahlgrade der Transformation benutzen. Wir sind dadurch einer Reihe von Fallunterscheidungen überhoben, welche bei zusammengesetzten Transformationsgraden die Betrachtung erschweren. Indessen hat diese Beschränkung auch einen Nachtheil. Wir werden nämlich mit unserem Beweise nur dann durchkommen, wenn wir den Satz benutzen, dass in jedem unserer h Gitter Primzahlen π vorkommen. Der Beweis dieses Satzes erfordert höhere Betrachtungen und ist von Weber geliefert worden. Wir müssen hier den Satz als bewiesen übernehmen.*)

*) Dieses ist aber, wie wir wiederholen, nur ein Mittel zur Abkürzung der Darstellung. Wir können auch ohne den Weber'schen Satz durchkommen, indem wir solche zusammengesetzte Transformationsgrade n betrachten, die sich im Gitter G_β, $G_{-\beta}$ zerlegen.

Der Transformationsgrad p soll in unserer Normalfigur die Herleitung

$$p = \pi . \bar{\pi}$$

gestatten. Die Zahl π gehöre dem von dem Hauptgitter verschiedenen Gitter G_β an, so daß $\beta \neq 0$ ist. Wir können die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1) $\pi = \bar{\pi}$ und $G_\beta = G_{-\beta}$

2) $\pi \neq \bar{\pi}$. $G_\beta = G_{-\beta}$

3) $\pi \neq \bar{\pi}$. $G_\beta \neq G_{-\beta}$.

In den beiden ersten Fällen ist G_β ein Ancepsgitter u. zw. befindet sich im Falle 1.) der Punkt $(\pi, \bar{\pi})$ auf einer Symmetrielinie des Ancepsgitters, im Falle 2.) in einer beliebigen Ecke desselben. Im dritten Falle ist G_β kein Ancepsgitter.

Betrachten wir nun die zur Zahl p gehörige Transformationsgleichung

$$F_p(J', J) = 0.$$

Unter den $p+1$ Wurzeln J' befinden sich die Werthe $J' = J\alpha + \beta$ und

sich für die 3 unm
nachstehende Folg
1.) Im Falle 1.) i
Transformations
nämlich

$$J' = J_2 +$$

Dieselbe kann
se als gemeinsam
beiden Gleichun

$$F_p(J', J_a)$$

nach der Methu
gemeinsamen I
werden. Wir erh

Werthe $y = y_\alpha$ wir in die Transformationsgleichung eingesetzt haben. Der Index α kommt nur in dem Argumente von R zum Ausdrucke. Die Coefficienten von F und also die von R bestimmen sich (ausser durch den Werth der Discriminante $-\nabla$) nur durch die Zahl π, oder wie wir sagen können, durch den Index β desjenigen Gitters, in welchem π liegt. Benutzt man verschiedene π desselben Index β, so wird man alle Mal auf dasselbe $y_{\alpha \pm \beta}$ geführt, so dass die entstehenden rationalen Functionen $R(y_\alpha)$ numerisch übereinstimmen. Wir mögen daher die vorstehende Formel ausführlicher folgendermassen schreiben:

$$\text{II}\; y_{\alpha \pm \beta} = R_\beta(y_\alpha).$$

2.) Im Falle 2.) giebt es <u>zwei verschiedene</u> Transformationen p^{ter} Ordnung, welche auf <u>denselben</u>

den Werth

$$J' = J_\alpha \pm \beta$$

führen. In Folge dessen hat die Gleichung $F(J' J_\alpha) = 0$ jetzt eine Doppelwurzel. Diese kann direkt aus der Gleichung $F = 0$ oder (falls es ausser dieser noch andere Doppelwurzeln geben sollte) mit Hinzuziehung der Gleichung $X_\nabla(J') = 0$, in rationaler Form als Function von J_α berechnet werden.

Der Werth dieser Function hängt nur von dem Index β ab. Wir haben also auch in diesem Falle

$$J_\alpha \pm \beta = R_\beta(J_\alpha).$$

In den bisher betrachteten Fällen 1.) und 2.) haben wir keinen Grund gehabt, den natürlichen Rationalitätsbereich zu erweitern. Die Coefficienten von R ergeben sich als gewöhnliche ganze Zahlen.

3.) Wir kommen nun zu dem

allgemeinen Falle 3.). Hier existi-
ren zwei verschiedene Wurzeln

$$f' = f_{\alpha+\beta} \text{ und } f' = f_{\alpha-\beta},$$

welche den beiden Gleichungen

$$F(f' f_\alpha) = 0 \text{ und } X_\nabla(f') = 0$$

gemeinsam sind. Das Euklidi-
sche Verfahren liefert hier zur Be-
stimmung von $f_{\alpha+\beta}$ und $f_{\alpha-\beta}$
eine quadratische Gleichung. Hier
sind also nicht $f_{\alpha+\beta}$ und
$f_{\alpha-\beta}$ selbst, sondern nur die
symmetrischen Functionen dieser
Grössen rational bekannt. Wir
haben etwa:

$$f_{\alpha+\beta} + f_{\alpha-\beta} = R'_\beta(f_\alpha)$$

$$f_{\alpha+\beta} \cdot f_{\alpha-\beta} = R''_\beta(f_\alpha).$$

Die Coefficienten der Functionen
R' und R'' hängen nur von β
ab und sind gewöhnliche gan-
ze Zahlen. Die vorstehenden Glei-
chungen mögen wir etwas um-

bestimmter folgendermassen schreiben:

$$J_{\alpha+\beta} = R'_{\beta}(J_{\alpha}, J_{\alpha-\beta}).$$

Wie man sieht, führt die Transformationsgleichung in diesem allgemeinen Falle nicht völlig zum Ziele. Wir müssen daher zu neuen Hülfsmitteln unsere Zuflucht nehmen. Diese liefert uns die Multiplicatorgleichung:

$$\Phi(M, J) = 0, \text{ wo } M = \rho \sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}}.$$

Zunächst ändern wir dieselbe ein wenig ab. Wie pg. 66 erwähnt, sind ihre Coefficienten nicht immer im natürlichen Rationalitätsbereiche enthalten. Stellen wir aber eine entsprechende Gleichung für

$$M^{12} = \rho^{12} \frac{\Delta'}{\Delta}$$

auf, so erhalten wir eine Gleichung

$$\Psi(M^{12}, J) = 0,$$

deren Coefficienten unter allen Umständen rationale ganze Zahlen sind.

Andererseits läßt sich M^{12} rational und ganzzahlig durch die entsprechenden Werthe von j und j' ausdrücken (wenigstens, solange j' nicht Doppelwurzel der Gleichung $F(j', j) = 0$ ist, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll.) In dem uns interessirenden Falle 3.) können wir also jedenfalls setzen:

$$M^{12}_{\alpha+\beta} = Rat(j_{\alpha+\beta}, j_\alpha)$$

$$M^{12}_{\alpha-\beta} = Rat(j_{\alpha-\beta}, j_\alpha).$$

denn die Wurzeln $j_{\alpha+\beta}, j_{\alpha-\beta}$ sind im vorliegenden Falle nach pg. 230 einfache Wurzeln der Transformationsgleichung.

Hiermit ist allerdings zunächst noch nichts gewonnen, denn die Indices $+\beta$ und $-\beta$ erscheinen hier wieder gleichberechtigt neben

$\alpha+\beta$

$$\mathfrak{N}^{12}_{\alpha-\beta} = \pi^{12}$$

Indem diese Gl
durch die Factoren
terscheiden, geben
tel den Index +
$-\beta$ zu trennen.

24. VII. 96. Dies wird folge
werkstelligt ver
die vorstehenden

1.) $\bar{\pi}^{12} \frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha} =$

Hier vertausch

nun

$$J_{\alpha+2\beta} = R_\beta(J_{\alpha+\beta}, J_\alpha),$$

so daß der Ausdruck $R'(J_{\alpha+2\beta}, J_{\alpha+\beta})$ geschrieben werden kann als eine rationale Function von $J_{\alpha+\beta}$ und J_α.

Wir können also die folgende Gleichung anschreiben:

$$2.)\ \pi^{12}\frac{\Delta_{\alpha+2\beta}}{\Delta_{\alpha+\beta}} = R_2'(J_{\alpha+\beta}, J_\alpha).$$

In derselben Weise gewinnen wir aus 2)

$$3.)\ \pi^{12}\frac{\Delta_{\alpha+3\beta}}{\Delta_{\alpha+2\beta}} = R_3'(J_{\alpha+\beta}, J_\alpha) \text{ etc.}$$

Wir erhalten so eine Kette von Gleichungen. Nach der Compositionstheorie muß sich dieselbe schliessen. Ist nämlich k der Exponent, welcher zu dem Gitter G_β gehört (vergl. pg 146), so haben wir

$$J_{\alpha+k\beta} = J_\alpha,\quad \Delta_{\alpha+k\beta} = \Delta_\alpha.$$

chungen 1.) 2.) . . . k

a) $\pi^{12k} = R_1' \ldots$

In derselben Weis

b) $\pi^{12k} = R_1' \ldots$

Die beiden Gleic

b) halten wir nu

dratischen Gleic

welche zwischen

besteht.

Dieselbe hat m

b) die andere Wur

stimmen wir al

von dem Index α unabhängig, da dieses sowohl für die quadratische Gleichung als für die Funktionen $R_1, R_2 \ldots R_k$ gilt. Wir können also wiederum schreiben

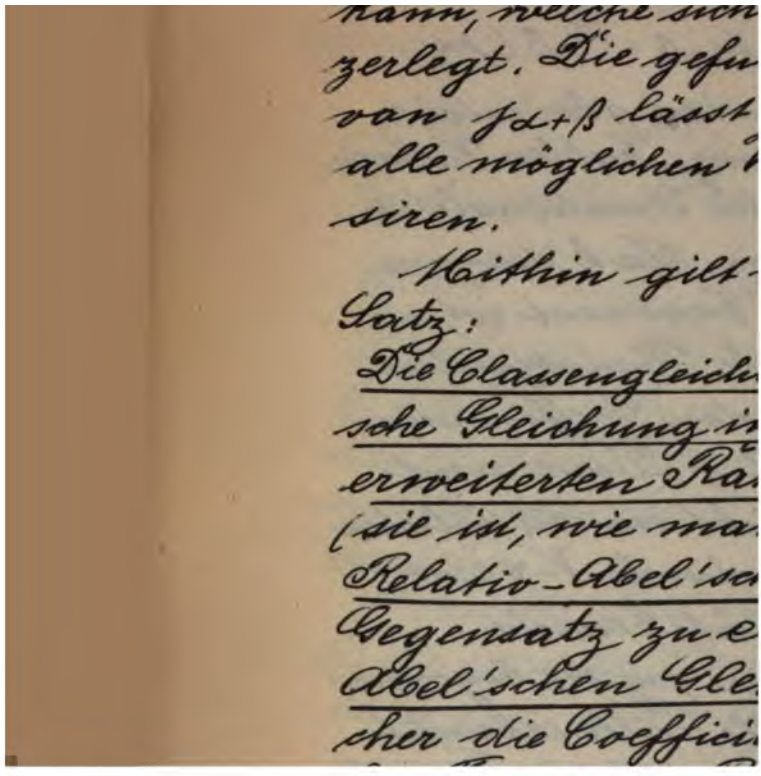
$$J_{\alpha+\beta} = R_\beta(J_\alpha) \text{ bez. } J_{\alpha-\beta} = R_{-\beta}(J_\alpha).$$

Die Coefficienten sind aber nicht mehr, wie früher ganze Zahlen. Vielmehr gehen in dieselben die Irrationalitäten π^{nk} bez. π^{-nk} ein. Da k der zum Gitter G_β gehörige Exponent ist, so werden π^k und π^{-k} Hauptzahlen. Dasselbe gilt von den Coefficienten von R_β und $R_{-\beta}$. Diese sind ganze Zahlen nicht im natürlichen sondern in dem durch $\sqrt{-\Delta}$ erweiterten Rationalitätsbereiche.

Hiermit ist der pag. 288 begonnene Beweis für alle Fälle erbracht. Wir haben gesehen, dass die Formel

$$J_{\alpha+\beta} = R_\beta(J_\alpha)$$

allemal statthat, wenn es eine Primzahl p giebt, welche in dem



isomorph.

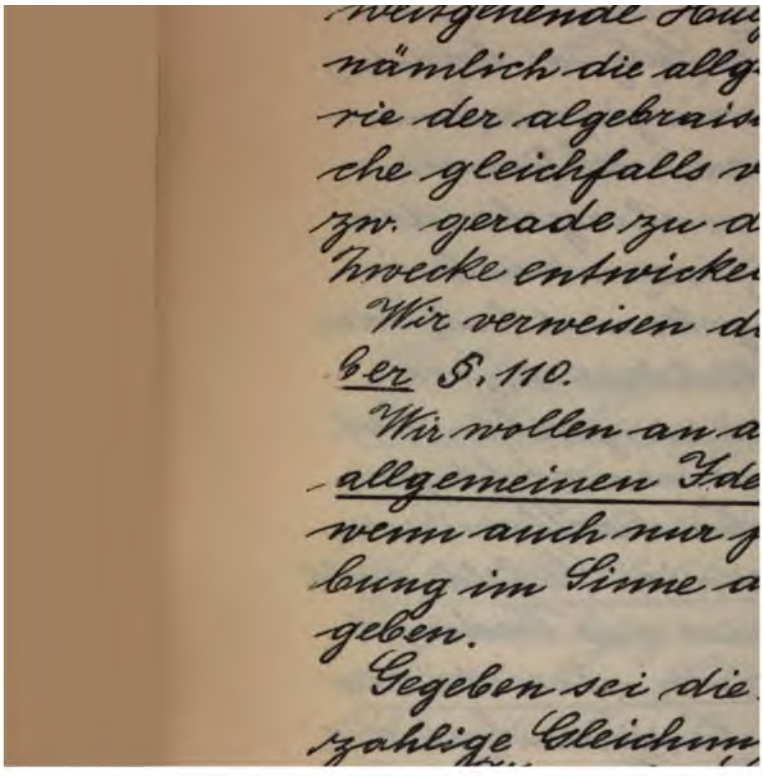
Eine unmittelbare Folge unseres Satzes ist diese:

Die Classengleichung ist, (wie jede Abel'sche Gleichung) durch Wurzelzeichen lösbar.

Der letztgenannte Satz ist bereits von Abel selbst ausgesprochen. Wir müssen daraus schliessen, dass er auch die vorhergehenden Entwickelungen, wenn auch in anderer Form, gekannt hat, oder doch deren Möglichkeit im raschen Vorausblick eingesehen hat.

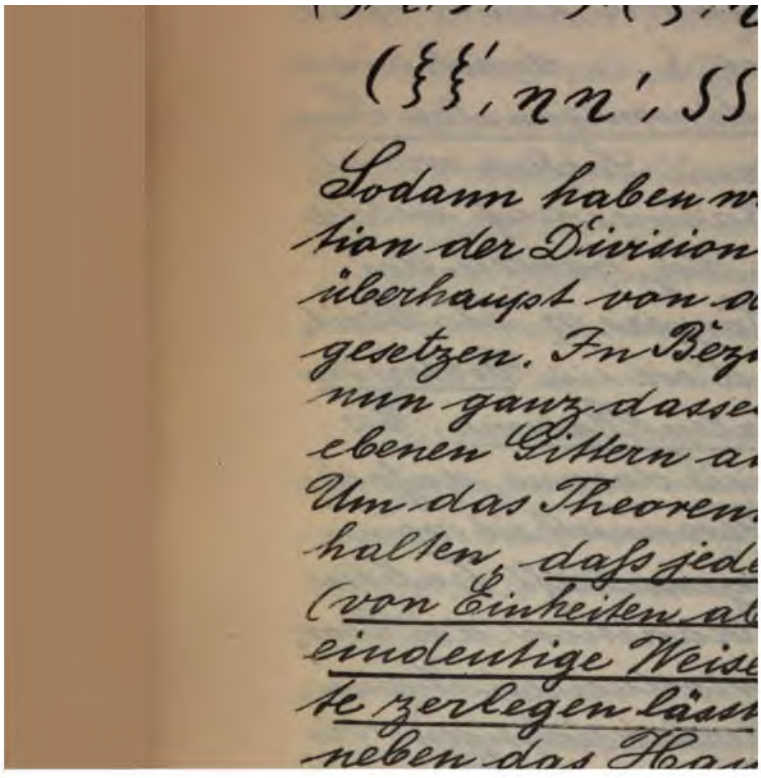
Mit den angegebenen wichtigen Resultaten ist aber die Theorie der singulären elliptischen Gebilde nicht abgeschlossen. Es ist das Verdienst von Kronecker, der als erster den Abel'schen Satz bewiesen hat, diese Theorie noch weiter geführt zu haben.

Kronecker zeigt vor allen Dingen, dass die Classengleichung eine irreducible Gleichung ist, dass



ganze algebraische Zahlen sind. Wir verstehen jetzt unter $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ einen Complex so erhaltener zusammengehöriger ganzer Zahlen.

Zur geometrischen Interpretation kommen wir, wenn wir den Complex der Zahlen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ durch einen Punkt des n-dimensionalen Raumes repräsentiren. Suchen wir alle Punkte des Raumes auf, welche zu Coordinaten bez. Zahlen des Körpers ξ, des Körpers η, etc besitzen, so bilden diese ein Gitter im n-dimensionalen Raume. Es ergiebt sich dieses daraus, dass die so entstehende Gesammtheit von Punkten die Eigenschaft haben muss, sich bei Addition der Coordinaten zu reproduciren. In unserem Bilde berücksichtigen wir hiernach immer gleichzeitig n Zahlen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, während man in der Körpertheorie nur je von einer dieser Grössen redet. Wir haben zunächst zu defi-

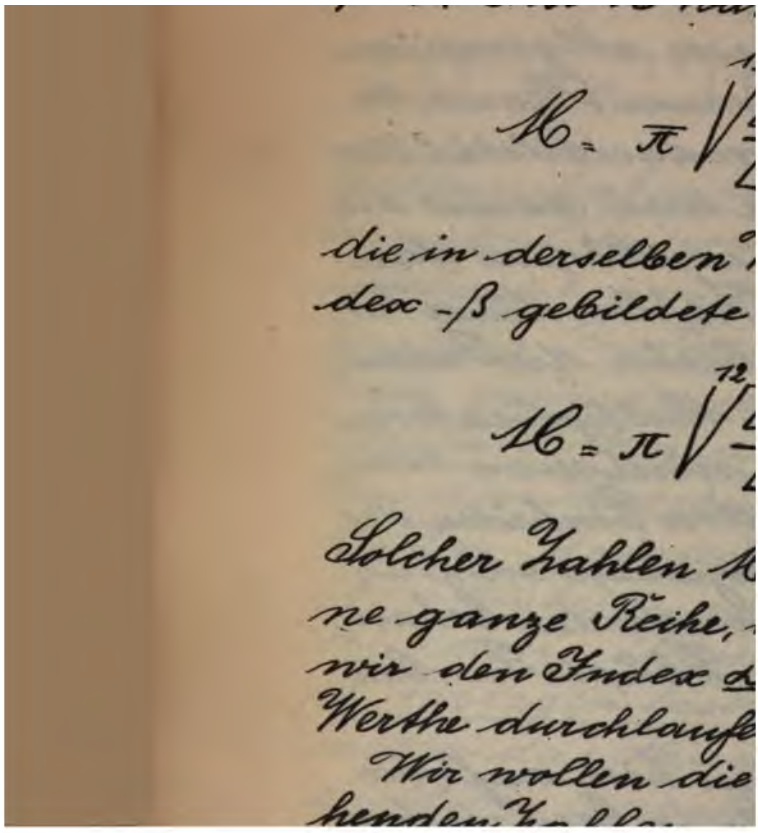


ters, den „wirklichen Punkten“ in die Betrachtung einbeziehen. Ich kann diesbezüglich auf die Furtwängler'sche Dissertation*) verweisen, wo der Fall $n = 3$ durchgeführt wird.

Auf Grund dieser allgemeinen Idealtheorie ist es nun Kronecker gelungen, die Irreducibilität der Classengleichung und damit die Existenz des Classenkörpers darzuthun. Von den Zahlen dieses Körpers kennen wir bisher die Invarianten j und die Multiplicatoren M^{12}. Weiterhin wird man namentlich nach den Einheiten des Körpers, den Primzahlen etc. fragen. Diese Dinge werden behandelt von Weber, Ellipt. Fu. S. 110 und 111.

Wir müssen uns hier auf die folgende Bemerkung beschränken.

*) Furtwängler, Zur Theorie der in Linearfactoren zerlegbaren, ganzzahligen ternären cubischen Formen. Göttingen 1896.



$$\bar{\pi}\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha+\beta}{\Delta\alpha}}\quad \pi\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha+\beta}} = \bar{\pi}\pi = p.$$

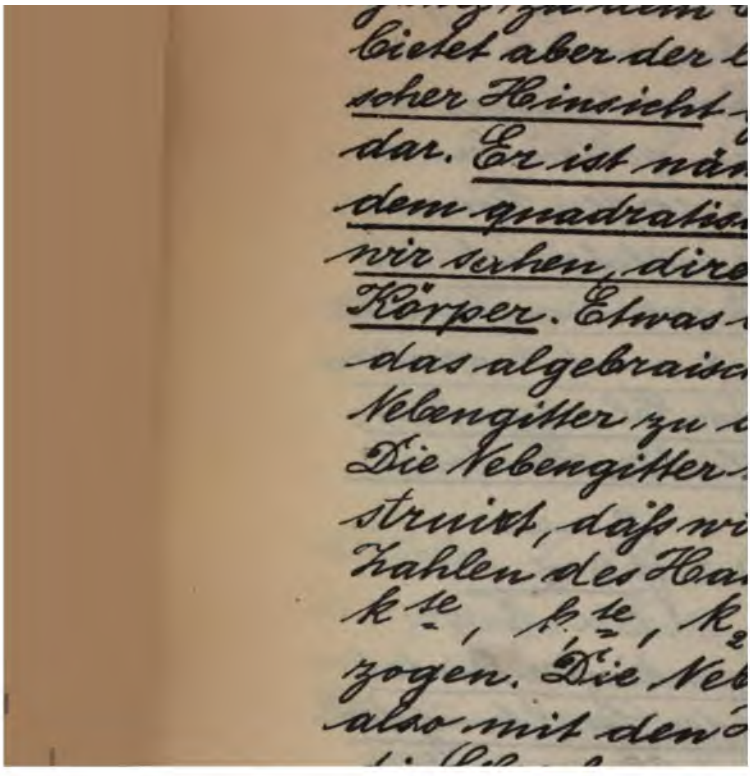
Um den Sinn dieser Gleichung gehörig zu würdigen, müssen wir uns auf den Standpunkt derjenigen Arithmetiker stellen, welche nur die Zahlen des Hauptgitters als „wirkliche" Zahlen gelten lassen. Dann werden wir sagen können:

Die Primzahl p, welche sich im quadratischen Körper nur in die idealen Factoren π und $\bar{\pi}$ spalten lässt, wird hier, im Classenkörper, in die wirklichen Factoren

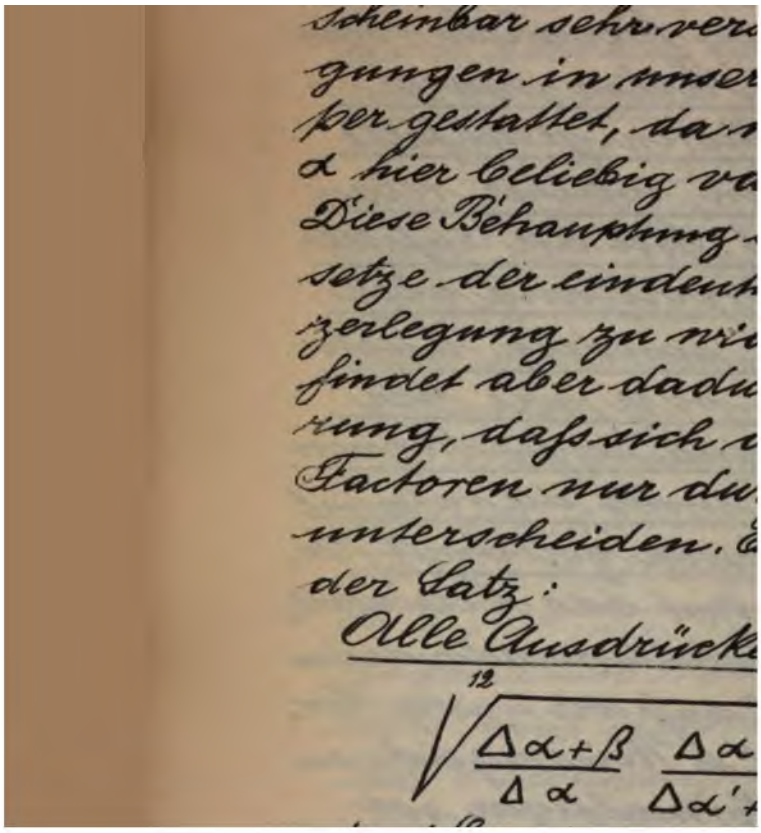
$$\bar{\pi}\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha+\beta}{\Delta\alpha}} \quad \text{bez.} \quad \pi\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha+\beta}}$$

zerlegt. Der Classenkörper leistet also hinsichtlich der Spaltung der Primzahl p dasselbe, wie die Hinzunahme der Nebengitter zu dem Hauptgitter der Ebene.

Man kann sich die Frage vorlegen, welche von diesen beiden



chung ist nicht direkt eine Abel'sche Gleichung. Die Wurzeln derselben $x_1, x_2, \ldots x_k$ sind allerdings rational durch einander auszudrücken, aber nur nach Adjunction der k^{ten} Einheitswurzeln. Wir können hiernach sagen: Die sämmtlichen Ecken unserer Normalfigur gehören gleichfalls einem Körper an, welcher relativ Abel'sch ist. Bei der Aufstellung dieses Körpers wird aber nicht nur $\sqrt{-\nabla}$, sondern auch $e^{\frac{2\pi i}{k}}, e^{\frac{2\pi i}{h_1}}, e^{\frac{2\pi i}{h_2}}, \ldots$ oder, wie wir zusammenfassend sagen können, $\sqrt{-\nabla}$ und $e^{\frac{2\pi i}{h}}$ unter die rational bekannten Grössen gerechnet. Geometrisch kommt das Hereinspielen der h^{ten} Einheitswurzeln darin zum Ausdruck, dass wir unsere Normalfigur auf h Weisen zeichnen konnten. Die Normalfigur ist h-deutig bestimmt. Umgekehrt ist der Classenkörper eindeutig definirt.



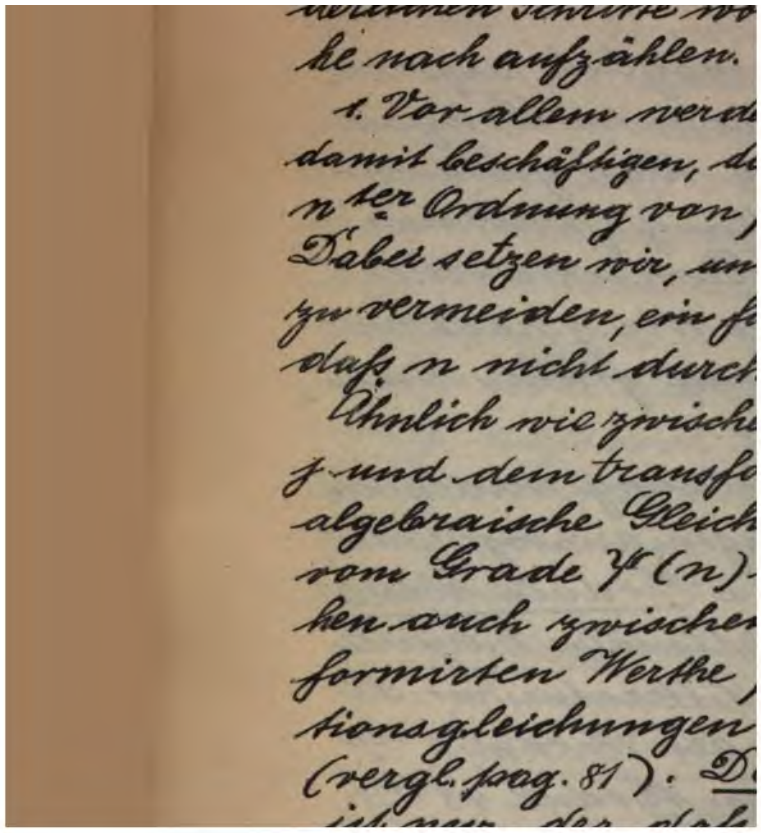
und $\alpha' = 0$ ist; die reellen Einheiten sind also durch den Ausdruck gegeben

$$\sqrt[12]{\frac{\Delta_0^2}{\Delta_\alpha \Delta_{-\alpha}}}$$

Leider ist es unmöglich, dass wir hier diese interessanten Fragen weiter verfolgen. Man gebraucht zu ihrer Behandlung zweckmässigerweise die Kronecker'sche Gränzformel, die wir gerade mit Rücksicht hierauf früher mitgetheilt hatten.

Den Rest der Vorlesung werden wir uns damit beschäftigen, analoge Untersuchungen für die Moduln höherer Stufe aufzustellen. Ansätze hierzu liegen bereits in der Litteratur vor. So behandelt Weber den Modul 3ter Stufe V_J und den Modul 48ter Stufe $f = \sqrt[24]{k^2 k'^2}$, welche bez. der 1sten oder 2ten Stufe adjungirt sind.

Unsere Aufgabe soll es insbesondere sein, den Modul 5ter Stufe I



he nach aufzählen.

1. Vor allem werde
damit beschäftigen, d
n^ter Ordnung von
Daher setzen wir, un
zu vermeiden, ein f
dass n nicht durch

Ähnlich wie zwische
f und dem transfo
algebraische Gleich
vom Grade Ψ(n).
hen auch zwischen
formirten Werthe
tionsgleichungen
(vergl. pag. 81). D

terscheiden wir in eine Hauptgleichung und 59 Nebengleichungen. Wir vervollständigen die früheren Angaben hierüber folgendermassen.

a. Die Hauptgleichung $f(\varphi', \varphi) = 0$ liefert alle diejenigen transformirten $\varphi' = \varphi\left(\frac{a w + b}{c w + d}\right)$, $ad - bc = n$, für welche die Transformationscoefficienten a, b, c, d den Congruenzbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} a \equiv \pm 1 & b \equiv 0 \\ c \equiv 0 & d \equiv \pm n \end{array}\right\} \pmod 5$$

genügen. Die Coefficienten der Hauptgleichung sind rationale Zahlen des natürlichen Rationalitätsbereichs.

b. Die Nebengleichungen entstehen aus der Hauptgleichung dadurch, dass wir auf ζ oder auf ζ' beliebige Ikosaedersubstitutionen ausüben. Zunächst scheint es so, als ob auf diese Weise im Ganzen 60×60 Gleichungen entständen. Dies ist aber nicht der Fall, weil immer 60 von den sämmtlichen Gleichungen untereinander

stitution ausüben
verwandeln. So
von den 60×60 G
60 identisch wer
benden 60 Gleichu
in der Form aus

$$f(S(\xi'),$$

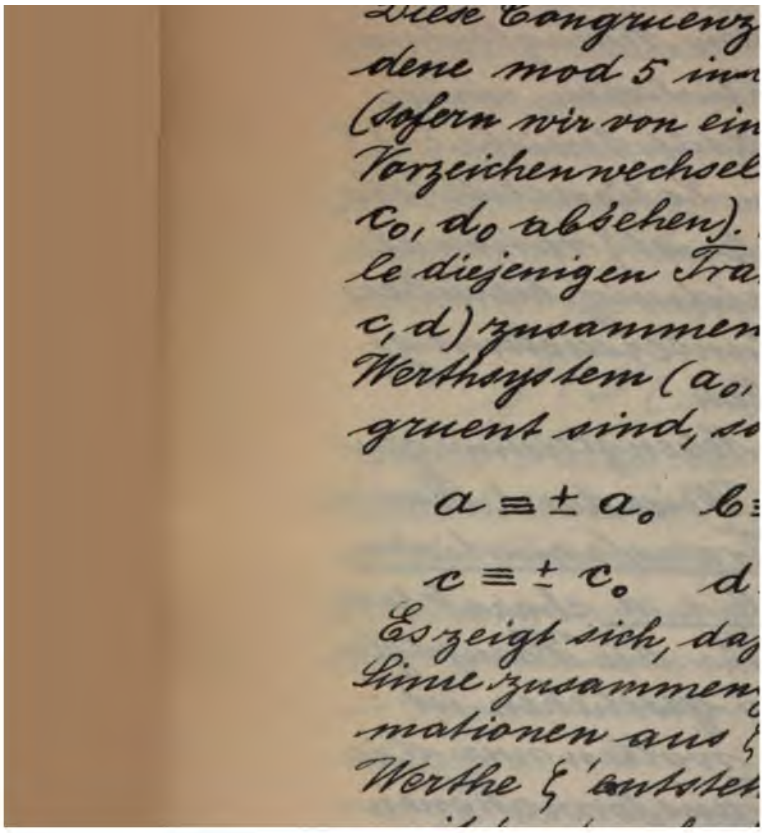
unter S eine bel
substitution ver
S die Identität, s
Hauptgleichung.
liebige andere
so ergiebt sich je
chungen.

c. Es ist klar, das

reich angehören können. Da nämlich durch die Substitution S die 5te Einheitswurzel ε eingeführt wird, so werden die Coefficienten im allgemeinen dem durch ε erweiterten Rationalitätsbereich angehören. Es ist aber auch möglich, daß von den Nebengleichungen einige im natürlichen, einige in dem Rationalitätsbereiche $\varepsilon + \varepsilon^4$ (welcher mit dem Rationalitätsbereiche $\sqrt{5}$ identisch ist) rational sind. Die Entscheidung hierüber muß der Specialuntersuchung vorbehalten bleiben.

2. Wir wollen die Nebengleichungen noch in ähnlicher Weise durch Bedingungen für die Transformationscoefficienten a, b, c, d charakterisiren, wie dieses für die Hauptgleichung bereits oben geschehen ist. Zu dem Zwecke wollen wir die sämmtlichen Transformationen:

$$w' = \frac{a w + b}{c w + d} \quad , \quad ad - bc = n$$



Diese Congruenz
dene mod 5 im
(sofern wir von ein
Vorzeichenwechsel
x_0, d_0 absehen).
le diejenigen Tra
c, d) zusammen
Werthsystem (a_0,
gruent sind, so

$$a \equiv \pm a_0 \quad b \equiv$$

$$c \equiv \pm c_0 \quad d$$

Es zeigt sich, da
Sinne zusammen
mationen aus
Werthe ξ' entste

des Schemas $\left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right|$ unterscheiden und allgemein in der Form schreiben:

$$f\left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right| (\mathcal{Y}', \mathcal{Y}) = 0$$

Die Hauptgleichung wird in dieser Bezeichnung durch das Schema $|^1_0\ ^0_n|$ charakterisirt.

Uebrigens betonen wir nochmals, dass wir immer nur „eigentliche" Transformationen im Auge haben, also ausschliessen, dass die a, b, c, d einen Factor gemein haben.

3. Es gilt nun vor allen Dingen, die Gesammtheit dieser 60 Transformationsgleichungen dadurch übersichtlicher zu machen, dass wir sie in Kategorieen gleichberechtigter Gleichungen zusammenfassen. Wir erwähnten bereits, dass wir zwei Transformationsgleichungen gleichberechtigt nennen, wenn sie auseinander hervorgehen, indem man auf ξ' und ξ dieselbe Ikosaedersubstitution (cogrediente Ikosaedersubstitutionen)

chung zu betrachten
gemein zu reden d
welche die einfach
cienten darbietet.
4. Jede unseres 60
gleichungen geht wie
60 simultanen Subs
und ξ' in sich übe
nen sind aber im
aus nicht „congruen
dient", d. h. für ξ
lautend. Indessen
der 60 Substitutionen
Wir wollen die Anza
dienten Substitution
als das „Gewicht"

engster Beziehung zu der eben postulirten Eintheilung unserer Gleichungen in Kategorieen gleichberechtigter Gleichungen. Ersichtlich ist nämlich die Anzahl der Gleichungen, welche mit einer gegebenen Gleichung gleichberechtigt sind, $\frac{60}{g}$.

5. Zur Bestimmung des Gewichtes dient die folgende Congruenz:

$$\left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix}\right| \equiv \pm \left|\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right| \pmod 5$$

mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

In dieser Congruenz sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Unbekannten. Die Substitutionen $\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$ geben direct diejenigen Ikosaedersubstitutionen von ξ, welche mit den zugehörigen Ikosaedersubstitutionen identisch sind. Die Anzahl der mod 5 unterschiedenen unimodularen Substitutionen $\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, welche der obigen Congruenz genügen, liefert direct die Gewichtszahl g.

6. Die Specialdiscussion dieser

$$\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Andere Schemata
mit
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$

$a_0 + d_0 \equiv 0$

$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$

$n \equiv 4$

Schemata

$$\pm \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$n \equiv 2 \pmod 5$

Schemata	Anzahl	g
$a_0 + d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	20	3
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	30	2

$n \equiv 3 \pmod 5$

Schemata	Anzahl	g
$a_0 + d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	20	3
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	30	2

Hier bedeutet immer die erste Colonne eine modulo 5 zu verstehende Congruenzbedingung für die Zahlen des Schemas, die zweite Colonne giebt an, für wieviele Schemata die

je unter sich anal

7. Aus den vorst
ben können wir n
schliessen:

Bei $n \equiv 2, 3$ (mo
mal diejenigen Sch
berechtigt, welche di
$\pm(a_0 + d_0)$ darbiete

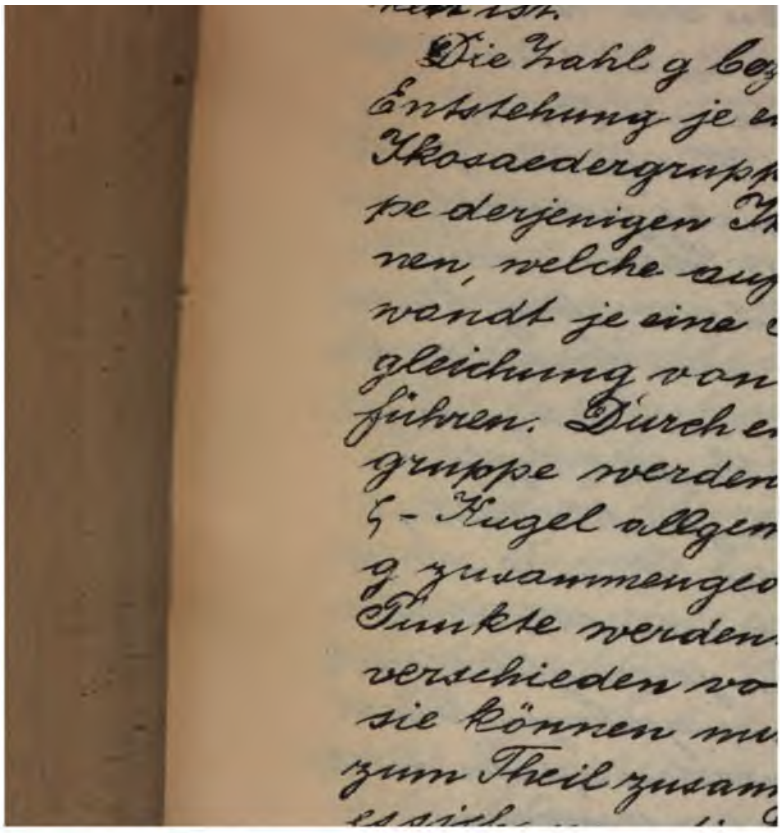
Denn greifen wir
ein beliebiges Schema
heraus. Dasselbe hat
folgedessen giebt es
gleichberechtigte Sc
müssen natürlich

besitzen das Gewicht 3.

Das Gleiche wie bei $n \equiv 2, 3$ gilt auch bei $n \equiv 1 \pmod 6$ für $(a_0 + d_0) \equiv 0, \pm 1$, ebenso bei $n \equiv 4$ für $(a_0 + d_0) \equiv 0, \pm 2$.

Dagegen zerfallen bei $n \equiv 1$ die Schemata mit $(a_0 + d_0) \equiv \pm 2 \pmod 6$ und bei $n \equiv 4$ die Schemata mit $(a_0 + d_0) \equiv \pm 1$ in drei getrennte Kategorien gleichberechtigter. Es giebt jedesmal ein für sich stehendes Schema vom Gewicht 60. Aber auch die übrig bleibenden 24 Schemata vom Gewicht 6 können noch nicht in eine Kategorie gehören, denn zum Gewicht 6 gehören jedesmal nur 12 gleichberechtigte Schemata. Es müssen deshalb die genannten 24 Schemata sich noch in 2 Kategorien von je 12 gleichberechtigten Schemata zerlegen. Diese 2 Kategorien werden später noch näher characterisirt werden.

8. Bevor wir dazu übergehen, die einzelne Gleichung $f\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}(\xi, \eta)$ in ganz analoger Weise



als Fixpunkte der Ikosaedersubsti-
tutionen auftreten.

9. Jetzt können wir in mannigfa-
cher Weise eine rationale Function g^{ter}
Grades r_g von ϑ bilden, welche bei den
Substitutionen unserer Untergruppe un-
geändert bleibt. Dies r_g kann im-
mer so ausgesucht werden – und
dies werden wir im Folgenden
voraussetzen – dass es in seinen
Coefficienten keine andere Irratio-
nalität enthält als ε.

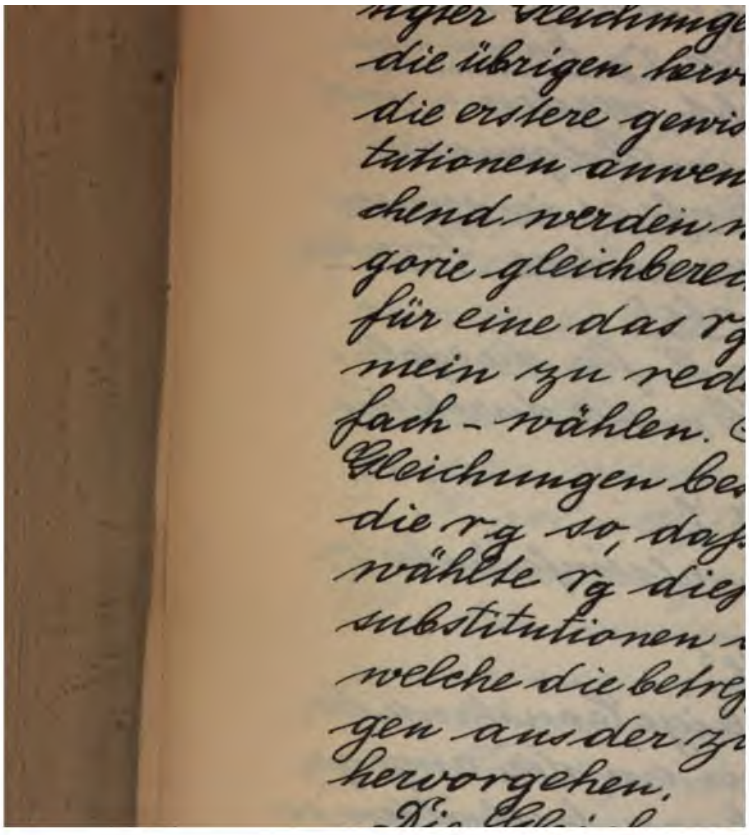
So können wir z. B. für die cycli-
sche Untergruppe G_5, die durch die
Substitution

$$\vartheta' = \varepsilon \vartheta$$

begründet wird, als einfachstes r_5
wählen:

$$r_5 = c\,\vartheta^5,$$

wo c eine beliebige Constante be-
deutet. Wollen wir an der angege-
benen Beschränkung festhalten, so
dürfen wir c nicht ganz beliebig
wählen, sondern müssen es als ra-
tionale Function von ε ansetzen.



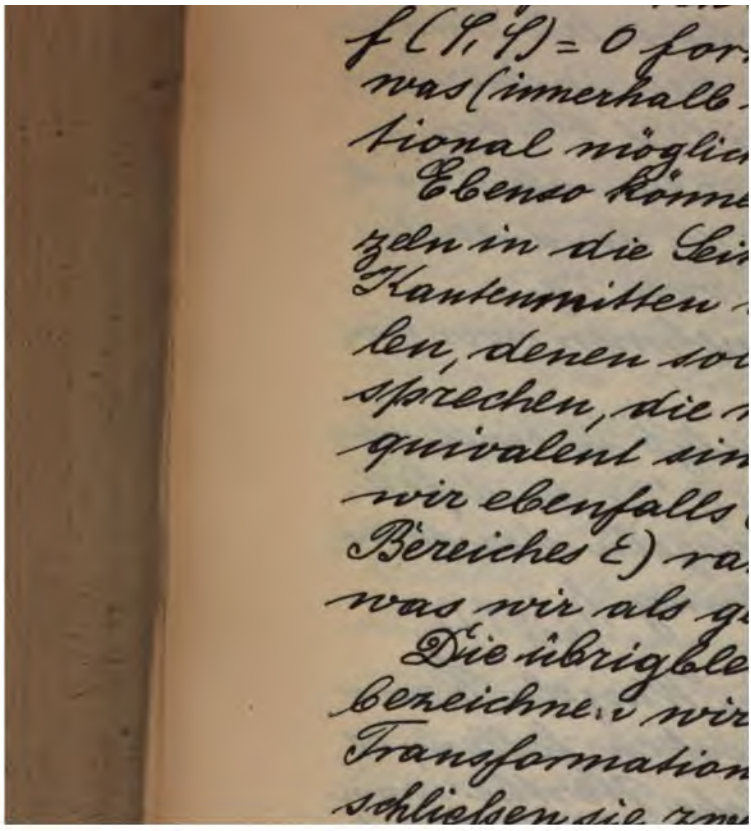
von jedesmal g zusammengehörigen Punkten der Kugel; sie hat also nur dann möglicher Weise vielfache Wurzeln, wenn es sich um die vorhin bezeichneten besonderen Punkte handelt.

Alle anderen rationalen Functionen von ξ, welche bei unserer Untergruppe ungeändert bleiben — insbesondere die rationale Function 60ten Grades f — sind rationale Functionen von r_g.

Ist $g = 60$, so nehmen wir einfach $r_{60} = f$.

10. Wir setzen jetzt in einer unserer Gleichungen $\xi' = \xi$ und fragen nach den Wurzeln der so entstehenden Gleichung $f(\varphi, \varphi)$

Ein Theil dieser Wurzeln kann in die Ikosaederecken fallen; es sind dieses solche Werthe von ξ, denen der Werth $f = \infty$, d. h. ein reelles ω entspricht. Die Vielfachheit dieser Wurzeln muss

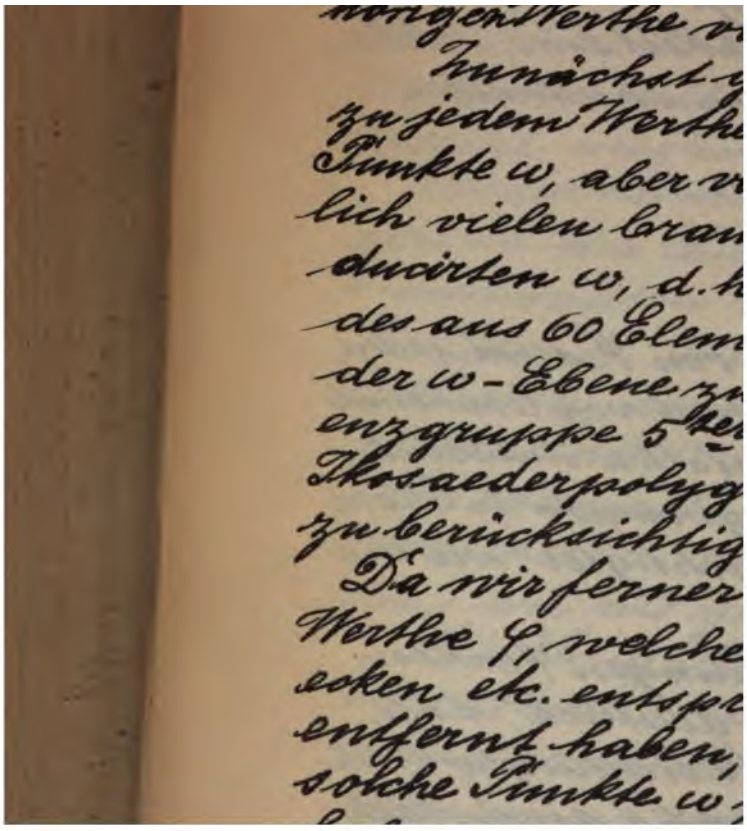


Von ihren Wurzeln gehören jedesmal g vermöge der zugehörigen Untergruppe zusammen, und diese g Wurzeln sind unter sich alle verschieden. Hieraus schliessen wir, dass unsere Gleichung in Wirklichkeit eine solche für r_g ist, die wir so schreiben:

$$\left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right|^{y_1} (r_g) = 0.$$

Die Coefficienten von Y sind jedenfalls nach Adjunction von ε rational, und im übrigen zerfallen natürlich die Gleichungen Y genau so in Kategorieen gleichberechtigter wie die Gleichungen f.

Bei den Gleichungen Y erkennen wir nun sehr deutlich, dass gleichberechtigte Gleichungen auch wirklich gleichwertig sind. Nach der Verabredung, die wir über die r_g getroffen haben, unterscheiden sich nämlich die gleichberechtig-



im elementaren Sinne aequivalent sind.

Für die Beziehung zwischen ζ und w gilt nun der Satz:

Ein Werth ζ wird ebenso oft Wurzel der Gleichung $[f(\varphi,\psi)]=0$ sein, als das entsprechende reducirte w bei Transformationen n^{ter} Ordnung des vorgelegten Schemas ungeändert bleibt.

und ferner:

Jedesmal g Werthe ζ (oder auch w) zusammen ergeben eine Wurzel r_g von $\Psi=0$.

12. Sei jetzt in Uebereinstimmung hiermit:

$$w=\frac{aw+b}{cw+d},$$

wo $(ad-bc)=n$ und $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \equiv \pm \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \pmod 5$

Wir haben dann

$$cw^2+(d-a)w-b=0$$

oder, wie wir abkürzend schreiben:

$$\mathfrak{P}w^2+\mathfrak{Q}w+\mathfrak{R}=0.$$

$P \equiv \pm c_0$, $Q \equiv \pm (d_0$

Wir setzen noch

$a + d =$

worauf natürl

unterliegt:

$t \equiv \pm (d_0 + a$

Als Werth der

ren Discrimina

den quadratisch

giebt sich jetzt

$4PR - Q^2 =$

Auf solche Wei

alle in Betracht

vorw zu erhalte

des Ikosaederbereiches der w-Ebene die Nullstellen aller solcher primitiver oder imprimitiver Gleichungen $Pw^2 + Qw + R = 0$, deren Discriminante $= -\nabla$ ist und die ausserdem den für die P, Q, R aufgestellten Congruenzbedingungen genügen. Von diesen Nullstellen schliesse man noch diejenigen aus, deren P, Q, R mit t einen gemeinsamen Theiler haben, — denn sie würden auf uneigentliche Transformationen n^{ter} Ordnung führen. — Ferner schliesse man diejenigen aus, die mit ρ oder i im elementaren Sinne aequivalent sind. Die übrigen w geben jeweils mit der richtigen Multiplicität die einzelnen Wurzeln der Gleichung $[f] = 0$, und, da sie zu φ zusammengehören, der Gleichung $\Psi(x_\varphi) = 0$.

13. Es kommt nun darauf an, für jeden Werth von ∇ die Zahl der hiermit bezeichneten w-Werthe

fall; die Zahl de
Klassen bezeichn
Dieses H' baut
Weise aus den An
mitiven Classen
Discriminanten
$(-\nabla)$ durch Abtren
quadratischer Th
Wir schreiben in

$$H' = \sum h \left(\frac{\nabla}{\tau}\right.$$

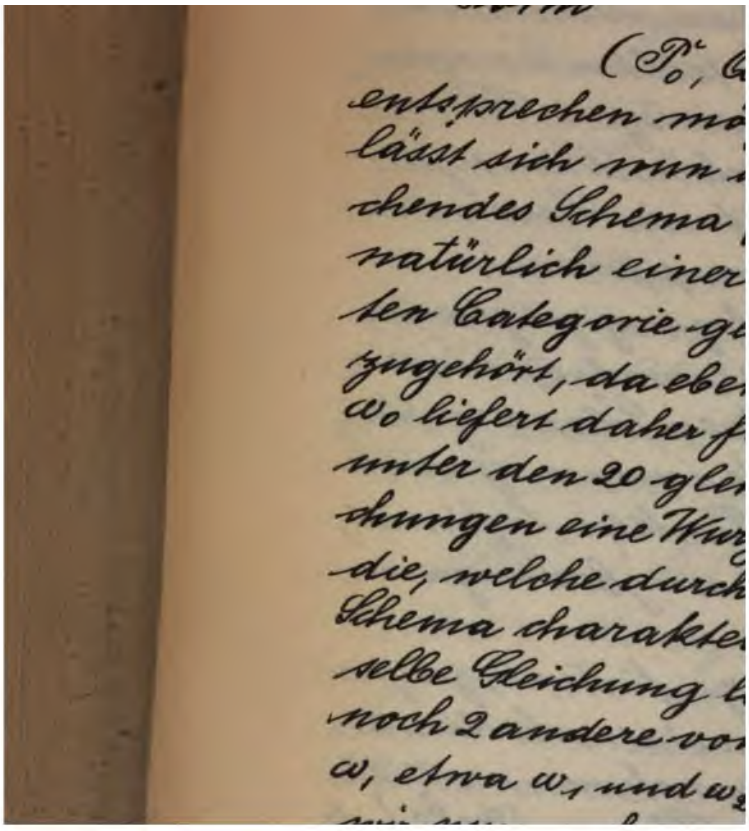
wobei τ theilerfre
len ist. Ist näm
Form aus den
Discriminante $\left(\frac{}{\tau}\right.$

meinsamen Theiler haben.

Zu jeder der H' Classen gehören nun innerhalb des Ikosaederbereichs der w-Ebene 60 Nullpunkte. Unter ihnen müssen wir diejenigen insbesondere aussuchen, welche den für P', Q, R' aufgestellten Congruenzbedingungen genügen. Wir wissen bereits, dass sich die auszuwählenden Punkte in Serien von je g zusammengruppiren.

Eine kurze Ueberlegung zeigt nun, dass sich bei $n \equiv 2, 3 \pmod 5$ innerhalb der zur einzelnen Classe gehörigen 60 Nullpunkte immer gerade eine Serie von g Punkten befindet, welche die Congruenzbedingungen befriedigt.

Um die Ideen zu fixiren, zeigen wir dies gleich an einem bestimmten Beispiel. Wir nehmen an $n \equiv 2 \pmod 5$ und ein Schema $\left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right|$, für das $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ ist. Solcher giebt es 20 mit dem zugehörigen Geschlecht 3. Es sei nun eine bestimmte Discri-



letztgenannten Gleichung die 19 gleich-berechtigten erhält, so sehen wir, dass für jede dieser 20 Gleichungen sicher 3 von unseren Werthen w Wurzeln liefern.

Da nun im ganzen 20 gleichberechtigte Gleichungen vorhanden sind, so sind damit auch alle 60 Werthe w erschöpft, d. h. von den 60 Nullpunkten gehören zu jeder von den $\frac{60}{g}$ gleichberechtigten Gleichungen stets eine und auch nur eine Serie von g Punkten.

Das giebt also für unsere Gleichung

$$g \sum H'(4n - t^2)$$

Nullpunkte (wobei t natürlich nur Werthe $\equiv \pm (a_0 + d_0) \pmod 5$ zu durchlaufen hat.

Dieselbe Formel gilt bei $n \equiv 1 \pmod 5$ für $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 1$, und bei $n \equiv 4 \pmod 5$ für $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 2$. Dagegen ist für $n \equiv 1$ und $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ und ebenso für $n \equiv 4$ und $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ eine Fallunterscheidung

Wir bezeichne

$n \equiv 1 \pmod 5$

	Schemata	Anzahl	g
I	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$	1	60
II	$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	12	5
III	$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	12	5

Hier ist die Ka
den übrigen gehe
ganz bestimmtes G
Kategorieen II u
dagegen vorläufig
dern

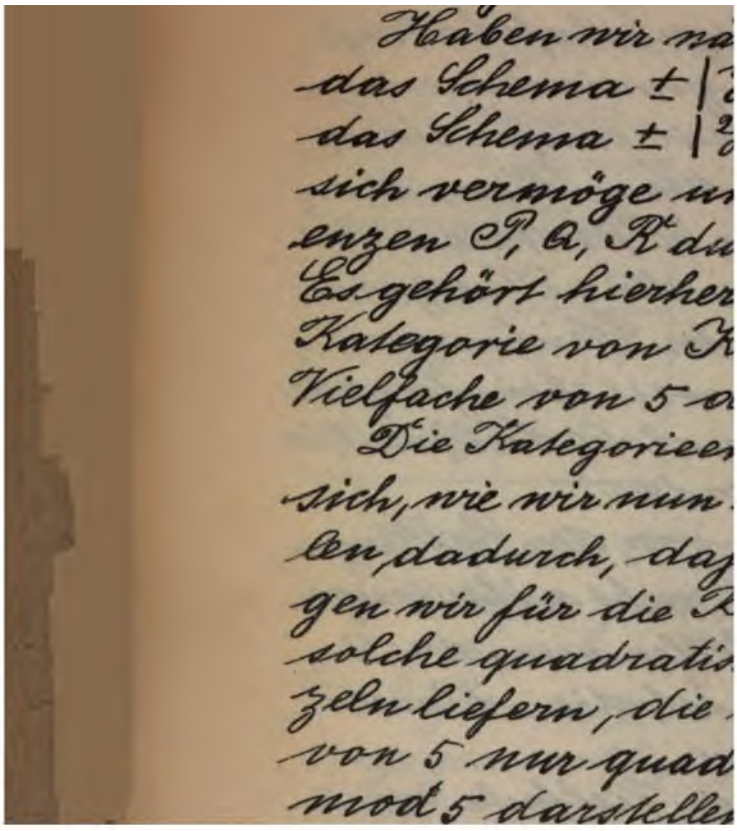
Discriminante $\nabla = 4n - t^2$ stets durch 5 theilbar ist, wie man leicht nachrechnet.

Sei nun ein beliebiges hergehöriges ∇ gegeben und greifen wir eine beliebige zu $(-\nabla)$ gehörige Klasse heraus, welche die Eigenschaft hat, dass P, Q, R, t keinen gemeinsamen Theiler haben. Dieser entsprechen dann 60 Nullpunkte w. Hier ist sofort klar, dass die 60 Werthe w nur Wurzeln für <u>eine</u> der 3 Kategorien gleichberechtigter Gleichungen liefern können, weil eben für jede Kategorie jedesmal 60 Nullpunkte aufgebraucht werden.

Nach der Lehre von den Gattungen, auf die wir hier nichts näher eingehen können, zerfallen nun, da ∇ durch 5 theilbar ist, die Klassen in 3 Kategorieen:

I. solche, die nur Vielfache von 5 darstellen,

II. solche, die ausser Vielfachen von 5 nur quadr. Reste mod. 5 darstellen,



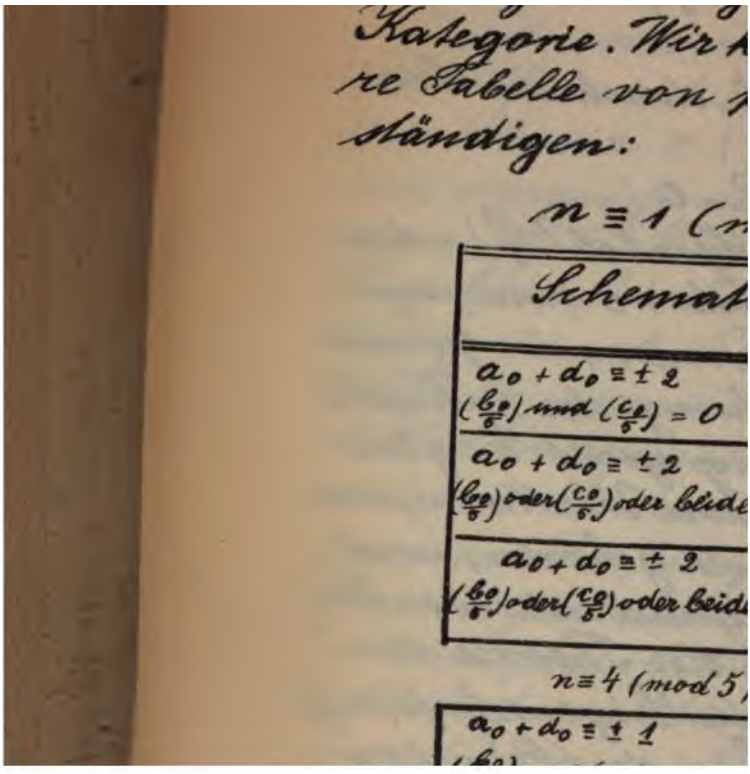
Haben wir na
das Schema ± |
das Schema ± |
sich vermöge un
enzen P, Q, R du
Es gehört hierher
Kategorie von R
Vielfache von 5 o
Die Kategorieen
sich, wie wir nun
len, dadurch, da
gen wir für die R
solche quadratis
zeln liefern, die
von 5 nur quad
mod 5 darstelle

III liefern entsprechend nur solche quadr. Formen Wurzeln, die ausser Vielfachen von 5 nur quadratische Nichtreste mod 5 darstellen; für Kategorie III ist daher entweder das Symbol $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide gleich -1.

Möge nämlich durch die Gleichung

$$Pw^2 + Qw + R = 0,$$

wo entweder das Symbol $\left(\frac{P}{5}\right)$ oder $\left(\frac{Q}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sind, ein Werth w definirt werden, der zu einer Wurzel einer Gleichung der II. Kategorie Veranlassung giebt. Es giebt dann noch 59 andere Werthe w, die zu derselben Klasse gehören, und die zugehörigen quadratischen Formen haben nach der Theorie der Gattungen alle die Eigenschaft, daß entweder das $\left(\frac{P}{5}\right)$ oder $\left(\frac{Q}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sind. Die 60 Werthe w vertheilen sich nun aber doch zu je 5 auf die 12 gleichberechtigten Gleichungen; infolgedessen



Kategorie. Wir
re Tabelle von
ständigen:

$n \equiv 1 \ (m$

Schemat
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $\left(\frac{b_0}{5}\right) \mod \left(\frac{c_0}{5}\right) = 0$
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beid

$n \equiv 4 \ (\mathrm{mod}\ 5$

$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$

Wir haben jetzt noch kurz die Zahl der Nullpunkte in den 3 Fällen anzugeben. Wir theilen zu diesem Zwecke die zu $(-\nabla)$ gehörigen H' Klassen in die obigen 3 Kategorien und bezeichnen deren Anzahlen mit H'_0, H'_{+1}, H'_{-1}, so dass also

H'_0 die Anzahl der Klassen ist, welche nur Vielfache von 5 darstellen,

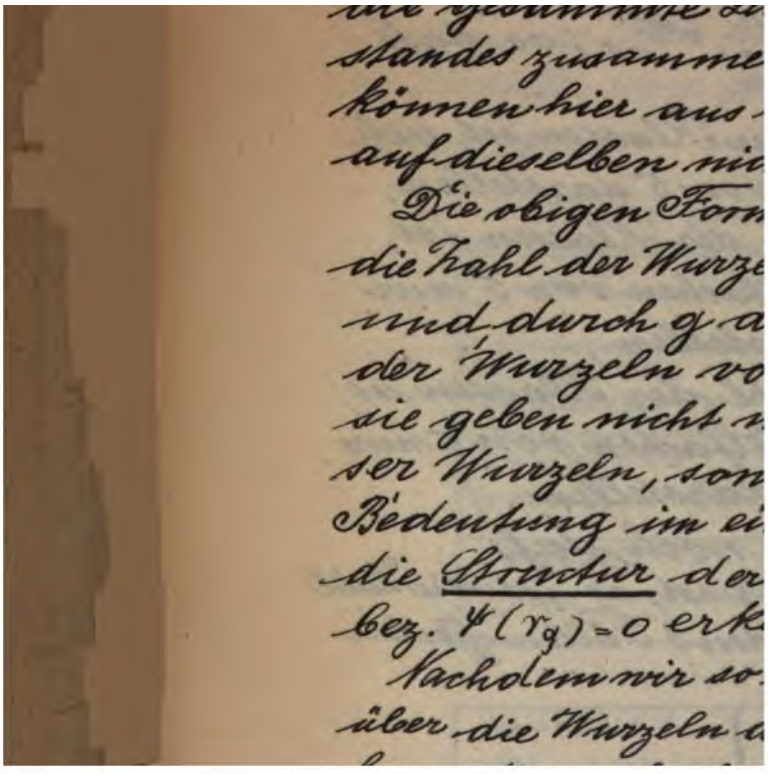
H'_{+1} die Anzahl der Klassen ist, welche ausser Vielfachen von 5 nur $\square R \bmod 5$ darstellen,

H'_{-1} die Anzahl der Klassen ist, welche ausser Vielfachen von 5 nur $\square NR \bmod 5$ darstellen.

Beachtet man noch, dass $H'_0(\nabla) = H'\left(\frac{\nabla}{25}\right)$ ist, so ist die Zahl der Wurzeln in den 3 Fällen offenbar

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I. } 60 \Sigma H'\left(\frac{4n-t^2}{25}\right) & \\ \text{II. } g \Sigma H'_{+1}(4n-t^2) & t \equiv \pm 2, \text{ wenn } n \equiv 1 \\ \text{III. } g \Sigma H'_{-1}(4n-t^2) & t \equiv \pm 1, \quad " \quad n \equiv 4 \end{array}\right\} \bmod 5 \text{ ist.}$$

15. Diese Anzahlen sind alle bereits



tionsgleichungen zu den Classengleichungen.

Wir bezeichnen als die zu einem Schema $\left|\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right|$ gehörige Classengleichung fünfter Stufe der Discriminante $(-\nabla)$ diejenige Gleichung vom Grade h, welcher die zu den betreffenden primitiven Classen gehörigen Werthe des r_g genügen. Wir schreiben diese Gleichung:

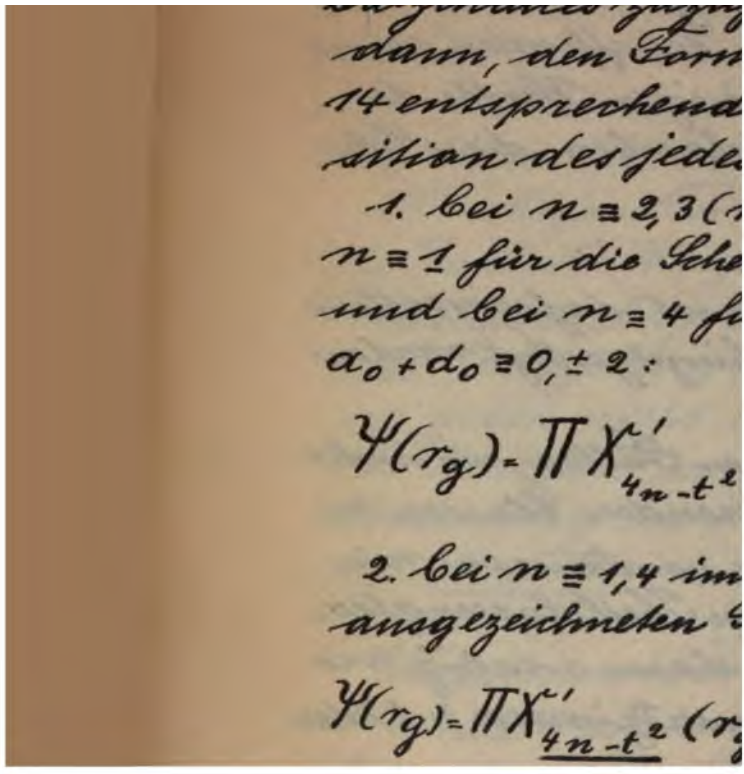
$$X_\nabla(r_g) = 0$$

wobei zu beachten ist, dass eigentlich noch ein Schema hinzugesetzt werden müsste.

In den besonderen Fällen, wo nicht sämmtliche existirenden Classen in Betracht kommen, construiren wir die entsprechenden Theilclassengleichungen, die wir dann analog wie H' mit einem Zusatzindex $+1$ oder -1 versehen

$$X_\nabla^{+1}(r_g) = 0 \quad X_\nabla^{-1}(r_g) = 0.$$

Endlich setzen wir aus diesen X eben so grössere Aggregate X' zusammen,



dann, den Form
14 entsprechend
sition des jede
1. bei $n \equiv 2, 3 (\ldots$
$n \equiv 1$ für die Sche
und bei $n \equiv 4$ fü
$a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 2$:

$$\Psi(r_g) = \Pi \chi'_{4n-t^2}$$

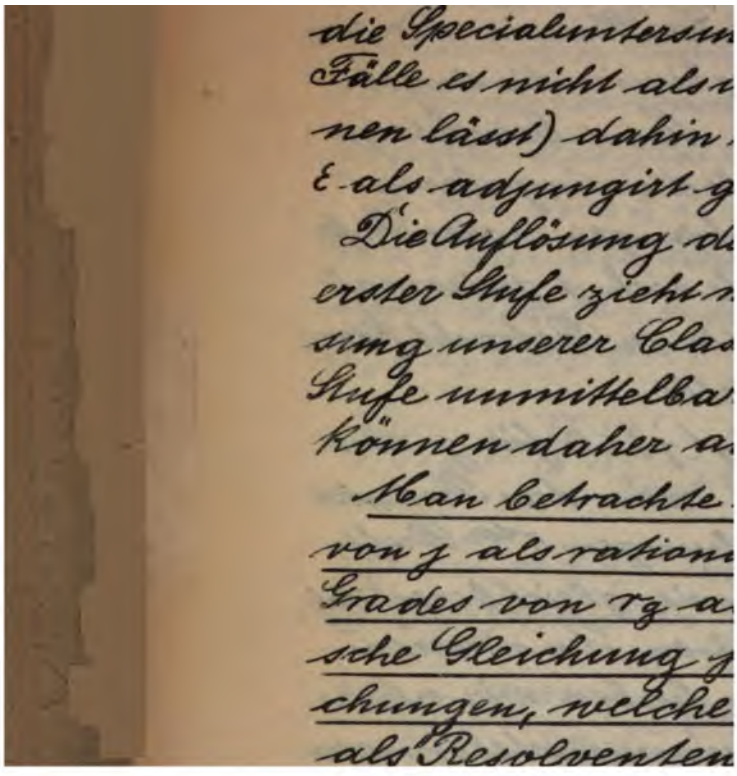
2. bei $n \equiv 1, 4$ im
ausgezeichneten

$$\Psi(r_g) = \Pi \chi'_{4n-t^2} (r_g$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi(r_g) &= \prod X'_{+1\,4n-t^2}(r_g)\\ \Psi(r_g) &= \prod X'_{-1\,4n-t^2}(r_g)\end{aligned}\right\} t \equiv \pm 2 \text{ resp. } \pm 1.$$

16. Es hat nun keine Schwierigkeit, unsere Ψ in rationaler Weise in die einzelnen X' und fernerhin in die einzelnen X zu spalten. Man beachte zu diesem Zwecke, daß die singulären j den Classengleichungen erster Stufe genügen und daß sich j jedesmal rational durch die in Betracht kommenden r_g darstellt.

Setzt man in $X_\nabla(j) = 0$ für j ein $R^{\frac{60}{g}}(r_g)$, so erhält man das Produkt von Classengleichungen 5ter Stufe, die zu einer Kategorie gleichberechtigter Schemata gehören. In unseren obigen Formeln haben wir aber ganz andere Zusammenstellungen der Classengleichungen 5ter Stufe; aus beiden wird man daher die einzelne Classengleichung 5ter Stufe rational isoliren können.


die Specialuntersu
Fälle es nicht als
nen lässt) dahin
E als adjungirt g
Die Auflösung d
erster Stufe zieht
sung unserer Cla
Stufe unmittelba
können daher a
Man betrachte
von y als ration
Grades von r_2 a
sche Gleichung y
chungen, welche
als Resolventen

und von $\mathfrak{k}$ zum Rationalitätsbereich eine rationale Wurzel.

Wir führen kurz den Grund an, der darin liegt, dass die Gleichungen

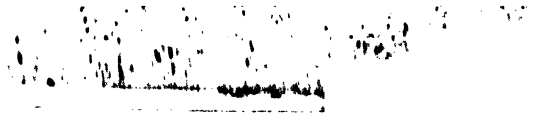
$$X_\nu(J) = 0 \quad \text{und} \quad j = R^{\circ}_{\frac{60}{g}}(r_g)$$

bei singulärem j eine gemeinsame Wurzel haben. Auf nähere Erörterungen, ob diese Gleichungen eventuell mehr Wurzeln gemeinsam haben u. s. w., können wir uns nicht mehr einlassen.

Zum Schluss möchte ich noch folgende Bemerkung anfügen:

Schon seit 20 Jahren, nämlich seit der Zeit, als Gierster die Ausdehnung der Classenzahlrelationen auf die höheren Stufen gelang, hege ich den lebhaften Wunsch, dass jemand allgemeiner die Theorie der singulären Moduln, insbesondere für die 5te Stufe durchführen möchte. Da in den Bemerkungen der letzten Stunden ein vollständiger Plan für diese

und erfolgreich
zur Erledigung



DEC 21 1937